

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matematiske-naturvetenskapliga fakulteten		Institutionen för matematik och statistik	
Tekijä — Författare — Author			
Pontus Säs			
Työn nimi — Arbetets titel — Title			
En introduktion till fraktal geometri			
Oppiaine — Läroämne — Subject			
Matematik			
Työn laji — Arbetets art — Level		Aika — Datum — Month and year	
Pro gradu-avhandling		November 2019	
		Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages	
		71	
Tiivistelmä — Referat — Abstract			
<p>Denna avhandling ger en introduktion till fraktal geometri utgående från klassiska exempel. Avsikten är att ge en mångsidig inblick i vad fraktaler är och vilka nya geometriska begrepp som behövs för att beskriva dem. I brist på en rigorös definition beskrivs fraktaler utgående från deras typiska egenskaper, såsom exakt eller ungefärlig självlikhet och detaljerad struktur på varje nivå. Enklare uttryckt kommer ingen godtyckligt liten del av en fraktal figur att likna en linje och varje godtyckligt liten del av fraktalen innehåller delar som är exakta eller ungefärliga miniatyrer av hela mängden. Begreppet fraktal myntades av Benoit Mandelbrot år 1975 och blev populärt i samband med möjligheten att rita bilder av dem med datorer. Mycket av den matematik som används inom fraktal geometri utvecklades däremot under början av 1900-talet av Felix Hausdorff och Gaston Julia med flera.</p> <p>Två av de grundläggande begreppen i fraktal geometri är Hausdorff- och Minkowskidimension, vilka är generaliseringar av begreppet dimension. För fraktaler är dessa i allmänhet inte heltal. Den här introduktionen till fraktal geometri omskriver deras definitioner och egenskaper samt olika metoder för att beräkna dem för ett antal varierande exempel.</p> <p>Avhandlingen behandlar också den rigorösa konstruktionen av itererande funktionssystem (IFS) vars attraktorer oftast är fraktaler. IFS ger en metod för att systematiskt konstruera och undersöka en stor mängd fraktaler. Avhandlingen beskriver också hur fraktaler uppstår i mycket olika kontexter såsom talteori, fraktal interpolation av data och komplex dynamik. Gemensamt för alla fraktaler är den roll som oändlig rekursion eller oändliga iterationer spelar i fraktalernas konstruktion. Fraktalers koppling till kaos behandlas också ytligt.</p> <p>Avslutningsvis diskuteras vilken koppling fraktal geometri har till naturen och vilken nytta vi eventuellt kan ha av området.</p> <p>Avhandlingen är ämnad för läsare med olika nivå av matematiska förkunskaper och innehåller både lättare och svårare koncept.</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords			
Fraktal, geometri, dimension, IFS, interpolation, dynamik, rekursion, iterationer			
Säilytyspaikka — Förvaringställe — Where deposited			
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information			

HELSINGFORS UNIVERSITET

# En introduktion till fraktal geometri

PRO GRADU

*Pontus Särs*

Handledare: Hans-Olav Tylli  
Institutionen för matematik och statistik  
Helsingfors universitet

26 november 2019

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>2</b>
1.1	Beteckningar och grundläggande definitioner . . . . .	3
1.2	Intuitiv förståelse av fraktaler . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Fraktaldimension</b>	<b>11</b>
2.1	Hausdorffmått . . . . .	11
2.2	Hausdorffdimension . . . . .	14
2.3	Minkowskidimension . . . . .	16
2.4	Samband mellan Minkowski- och Hausdorffdimensionen . . . . .	20
2.5	Beräkning av Minkowski- och Hausdorffdimensionen . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Itererade funktionssystem</b>	<b>25</b>
3.1	Itererade funktionssystem . . . . .	25
3.2	Dimensionen för självliknande mängder . . . . .	30
3.3	Kaos och kaospel . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Kurvor med fraktala egenskaper</b>	<b>37</b>
4.1	Kurvor utgående från generatorer . . . . .	37
4.2	Fraktal interpolation . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Exempel från talteori</b>	<b>46</b>
5.1	Fördelningen av decimaler i tal . . . . .	46
5.2	Kedjebråk . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Fraktaler i komplex dynamik</b>	<b>53</b>
6.1	Det utökade komplexa talplanet . . . . .	53
6.2	Juliamängder . . . . .	54
6.3	Mandelbrotmängden . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Tillämpningar</b>	<b>66</b>

# 1 Inledning

Begreppet fraktal myntades av Benoit Mandelbrot år 1975. I *The Fractal Geometry of Nature* [21, s. 1] skriver han att klassisk geometri misslyckas med att beskriva formen för ett träd eller ett berg eller ett moln eftersom "ett moln inte är ett klot" och "ett berg inte är en kon". Mandelbrot hävdar att de flesta naturliga föremål är fraktaler.

Trots att fraktaler blivit populära först efter att begreppet myntades så har specialfall av dessa studerats redan sedan början av 1900-talet. 1883 introducerade Georg Cantor den mängd som idag kallas Cantormängden (figur 1.1) och 1904 konstruerade Helge von Koch det som kallas Kochkurvan (figur 1.2). Dessa mängder konstruerades för att visa att det finns funktioner för vilka differentialkalkylen inte fungerar och de ansågs vara patologiska. År 1905 myntade Ernesto Cesàro begreppet självliknande, vilket beskriver en mängd som består av mindre kopior av sig själv, t.ex. Cantormängden och Kochkurvan. Bägge hör idag till de mest kända fraktalerna. Andra som har bidragit mycket till området fraktal geometri innan begreppet myntades är Felix Hausdorff, som 1918 introducerade Hausdorffdimensionen, och Gaston Julia och Pierre Fatou, vilka undersökte det som vi idag kallar komplex dynamik och är kontexten till andra välkända fraktaler: Mandelbrotmängden och Juliamängder. [28]

Det är dessvärre både svårt att definiera och svårt att kort förklara vad fraktaler är. När Mandelbrot först myntade begreppet definierade han fraktaler som mängder vars Hausdorffdimension är strängt större än dess topologiska dimension, men det har visat sig att de flesta definitioner antingen inkluderar mängder som inte borde räknas som fraktaler eller exkluderar mängder som borde räknas som fraktaler. Falconer [12] anser att man borde se fraktaler som de mängder som uppfyller de flesta av en lista med egenskaper, inte olikt hur "biologer betraktar definitionen av liv".

När de första fraktalerna konstruerades för drygt ett sekel sedan var de intressanta just för att de utmanade klassisk geometri och analys. Idag är de intressanta av samma anledning men vartefter de har studerats och tack vare möjligheten att rita bilder med datorer har de blivit tillgängliga på ett helt annat sätt. Bilderna visar fascinerande mönster och utmanar människans gestaltsförmåga i och med att fraktalerna har en oändligt komplicerad struktur. Att fraktaler ofta förekommer i samband med kaos bidrar också till att människor fascinerats av dem.

Avsikten med denna avhandling är att ge en introduktion till fraktal geometri med tyngdpunkten på klassiska exempel. I sektion 1.2 ges läsaren en uppfattning om vad fraktaler är och i kapitel 2 presenteras två typer av fraktal dimension och hur de kan beräknas. I kapitel 3 betraktas fraktaler som attraktorer för itererade funktionssystem, vilket ger en mycket användbar metod för att skapa och undersöka många fraktaler. I kapitel 4, 5 och 6 visas exempel på olika kontexter där fraktaler förekommer. Till sist presenteras några argument om hur fraktaler kan vara användbara i kapitel 7. Olika

kapitel och delar kräver olika mycket förhandskunskaper. Läsaren uppmuntras att läsa de delar av avhandlingen som intresserar och hoppa över resten och eventuellt återkomma senare. Det gäller i synnerhet kapitel 2. Det är också möjligt att förstå mycket av innehållet även om man inte läser alla bevis. Avhandlingen innehåller flera bilder som man med fördel kan bekanta sig med innan man börjar läsa texten. Det är författarens förhoppning att avhandlingen ska inspirera till fortsatta studier inom fraktal geometri.

## 1.1 Beteckningar och grundläggande definitioner

I denna avhandling undersöker vi egenskaper hos delmängder i något metriskt rum  $(X, d)$  där  $X$  i allmänhet är det  $n$ -dimensionella euklidiska rummet  $\mathbb{R}^n$  och metriken  $d$  bestäms av den euklidiska normen

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

där  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Både punkter i  $X$  och skalärer i  $\mathbb{R}$  betecknas med gemener. De senare nämnda kan också betecknas med grekiska bokstäver.

Mängder betecknas med versaler om de inte är någon av följande specifika mängder: den tomma mängden  $\emptyset$ , heltalen  $\mathbb{Z}$ , de rationella talen  $\mathbb{Q}$ , euklidiska rum  $\mathbb{R}^n$  eller de komplexa talen  $\mathbb{C}$ . Kardinaliteten för en mängd  $A$  betecknas  $\#A$ , det slutna höljet betecknas  $\overline{A}$  och randen för  $A$  betecknas  $\partial A$ .

Öppna intervall i  $\mathbb{R}$  betecknas  $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ , slutna intervall betecknas  $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$  och halvöppna intervall betecknas  $[a, b)$  eller  $(a, b]$ . Det öppna klotet med mittpunkt i  $x$  och radien  $r$  definieras som  $B(x, r) = \{y : |y - x| < r\}$  och det motsvarande slutna klotet definieras enligt  $\overline{B}(x, r) = \{y : |y - x| \leq r\}$ .

Enhetsintervallet är mängden  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , enhetskvadraten är  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  och den  $n$ -dimensionella enhetskuben är  $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ .

Reella tal  $x$  i enhetsintervallet presenteras ibland i basen  $b \in \mathbb{N}$  enligt

$$x = {}_b a_1 a_2 a_3 \dots = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \frac{a_3}{b^3} + \dots \quad (1.1)$$

En samling av ändligt eller uppräkneligt många mängder  $U_i \subset X$  betecknas  $\{U_i\}$ .  $\sum_i x_i$  betecknar summan av ett ändligt eller uppräkneligt antal tal eller punkter  $x_i$ . På motsvarande sätt betecknar  $\bigcup_i U_i$  och  $\bigcap_i U_i$  en union respektive ett snitt av ett ändligt eller uppräkneligt antal mängder  $U_i$ .

Ett viktigt verktyg inom undersökningen av fraktaler är  $\delta$ -övertäckningar. För att definiera  $\delta$ -övertäckning måste vi först definiera en diameter för delmängder av  $X$ .

**Definition 1.1.** Om  $A \subset X$  är en icke-tom mängd så definierar vi diametern  $|A|$  för mängden  $A$  som  $|A| = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ . Om  $A = \emptyset$  så är  $|A| = 0$ .

**Definition 1.2.** Om  $\delta > 0$  och  $\{U_i\}$  är en ändlig eller uppräknelig samling mängder i  $X$  för vilka  $|U_i| < \delta$  och  $A \subset \bigcup_i U_i$  så är  $\{U_i\}$  en  $\delta$ -övertäckning av  $A$ .

**Definition 1.3.** Om  $\delta > 0$  så kallas samlingen av  $n$ -dimensionella kuber med formen

$$[\delta t_1, \delta(t_1 + 1)] \times [\delta t_2, \delta(t_2 + 1)] \times \cdots \times [\delta t_n, \delta(t_n + 1)],$$

där  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ , för  $\delta$ -nätet för  $R^n$  och kuberna i  $\delta$ -nätet kallas  $\delta$ -nätkuber.

*Anmärkning 1.4.* Om  $\{U_i\}$  är en samling av  $\delta$ -nätkuber och  $A \subset \bigcup_i U_i$  så är  $\{U_i\}$  en  $\delta\sqrt{n}$ -övertäckning av  $A$ .

Ett annat viktigt verktyg är Hausdorffmetriken, som ger en möjlighet att undersöka om två mängder är identiska; om Hausdorffavståndet mellan två mängder är 0 så är de identiska.

**Definition 1.5.** Låt  $(X, d)$  vara ett metriskt rum. Låt  $x \in X$  och  $B \subset X$  vara icke-tom. Avståndet från punkten  $x$  till mängden  $B$  definieras som

$$d(x, B) = \inf\{d(x, b) : b \in B\}.$$

Avståndet mellan två mängder brukar på motsvarande sätt definieras som det kortaste avståndet mellan godtyckliga punkter i vardera mängden enligt

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Hausdorffavståndet bygger på en alternativ och osymmetrisk definition av avståndet.

**Definition 1.6** (Hausdorffmetrik). Låt  $A, B \subset X$  vara icke-tomma och låt

$$d'(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Hausdorffavståndet mellan  $A$  och  $B$  definieras som

$$d_H(A, B) = \max\{d'(A, B), d'(B, A)\}$$

eller ekvivalent som

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\}.$$

Om  $\mathcal{S}(X)$  är mängden av alla icke-tomma, kompakta delmängder av  $X$  så är  $d_H$  en metrik på  $\mathcal{S}(X)$  och kallas för Hausdorffmetriken eller Hausdorffavståndet.

*Anmärkning 1.7.* Beteckningen  $d_H$  påminner oss om att Hausdorffavståndet beror på någon metrik  $d$ , som inte behöver vara den euklidiska normen.

Iterationer av avbildningar är ett ofta förekommande fenomen i arbetet med fraktaler. Om  $x \in X$  och  $A \subset X$  och vi har en avbildning  $f: X \rightarrow Y$  så betecknar vi bilden av  $x$  och  $A$  som  $f(x)$  respektive  $f(A) = \{f(y) : y \in A\}$ . Om  $f$  är en transformation  $f: X \rightarrow X$  så betecknar vi  $k$  upprepningar av avbildningen som  $f^k(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ gånger}}(x) = f(f(\cdots f(x)))$ . Om avbildningen har en invers  $f^{-1}: X \rightarrow X$  så betecknar vi  $f^{-k}(x) = (f^{-1})^k(x)$ .

Utöver transformationerna translation, rotation, spegling och skalning bör läsaren känna till begreppen isometri, similaritet och affin transformation. En isometri  $f$  på  $X$  är en avbildning för vilken  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$  gäller för alla  $x, y \in X$ . Om  $X =$

$\mathbb{R}^n$  så kan isometrin ses som en sammansättning av en translation, en rotation och en spegling. En similaritet är på motsvarande sätt en avbildning för vilken  $d(f(x), f(y)) = cd(x, y)$  gäller för alla  $x, y \in X$  och något  $c > 0$ . Similariteten kan ses som en isometri som tillåter skalning.

En affin transformation på ett linjärt rum  $X$  är en avbildning  $f: X \rightarrow X$  som kan skrivas som  $f(x) = T(x) + b$  där  $T$  är en inverterbar linjär avbildning och  $b \in X$ . Om  $X = \mathbb{R}^n$  så gäller  $f(x) = Ax + b$  där  $A$  är en inverterbar matris och  $b$  är en  $n$ -dimensionell vektor. En affin transformation kan ses som en similaritet som tillåter olika skalning i olika riktningar.

Vi använder oss också av olika former av kontinuitet. Låt  $d_X$  vara en metrik för  $X$  och  $d_Y$  vara en metrik för  $Y$ . En avbildning  $f: X \rightarrow Y$  kallas Hölderkontinuerlig med avseende på  $\alpha > 0$  om den satisfierar  $d_Y(f(x), f(y)) \leq cd_X(x, y)^\alpha$  för något  $c > 0$  och alla  $x, y \in X$ . Om  $\alpha = 1$  så kallas avbildningen Lipschitzkontinuerlig och om den också satisfierar  $c_1 d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq c_2 d_X(x, y)$  för konstanterna  $0 < c_1 \leq c_2$  och alla  $x, y \in X$  så kallas avbildningen bilipschitzkontinuerlig.

Ett metriskt rum  $(X, d)$  är fullständigt om varje cauchyföljd i  $X$  konvergerar till en punkt i  $X$ . Om en avbildning  $f: X \rightarrow X$  är Lipschitzkontinuerlig med  $0 < c < 1$  så kallas den för en kontraktionsavbildning. Kontraktionsavbildningar på ett fullständigt metriskt rum har enligt Banachs fixpunktssats en unik punkt  $x \in X$  för vilken  $f(x) = x$ .

Läsaren förväntas vara bekant med måtteori. Begreppen och beteckningarna som används i denna avhandling är följande. Vi betecknar mängden av alla delmängder av  $X$  med  $\mathcal{P}(X)$ . Ett yttermått på  $X$  är en funktion  $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  så att

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
- (ii)  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  om  $A \subset B$  och
- (iii) om  $A_1, A_2, \dots$  är en ändlig eller uppräknelig följd av mängder i  $X$  så gäller

$$\mu^*\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu^*(A_i). \quad (1.2)$$

En mängd  $E \subset X$  är mätbar med avseende på  $\mu^*$  om  $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$  för alla  $A \subset X$ . De delmängder av  $X$  som är  $\mu^*$ -mätbara utgör  $\sigma$ -algebran

$$\Sigma(X) = \{A \subset X : A \text{ } \mu^*\text{-mätbar}\}.$$

Vi kan definiera ett mått  $\mu: \Sigma(X) \rightarrow [0, \infty]$  så att  $\mu(A) = \mu^*(A)$  för varje  $A \in \Sigma(X)$ . För en följd av parvist disjunkta mängder  $A_i \in \Sigma(X)$  gäller

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i). \quad (1.3)$$

Om  $\mu$  är ett mått på  $X$  och  $E \in \Sigma(X)$  så säger vi att  $\mu(E)$  är måttet för  $E$ . Det vanligaste måttet på  $\mathbb{R}^n$  är Lebesguemåttet. Vi betecknar det  $n$ -dimensionella Lebesguemåttet för  $E \subset \mathbb{R}^n$  med  $\mathcal{L}^n(E)$ . I sektion 2.2 bekantar vi oss med Hausdorffmåttet som är en generalisering av Lebesguemåttet.

I den här avhandlingen är vi främst intresserade av Borelmängder på något metriskt rum  $(X, d)$ , d.v.s. mängder som är öppna eller slutna eller mängder som är snittet

av en ändlig eller uppräknelig följd av Borelmängder. Ett mått  $\mu$  på  $X$  är Borel om varje Borelmängd i  $X$  är  $\mu^*$ -mätbar. Borel-algebran  $\mathcal{B}(X)$  är den minsta sigma-algebra som innehåller alla Borelmängder i  $X$ .

En typ av yttermått som är viktig i den här avhandlingen är massfördelningar.

**Definition 1.8.** Låt  $\mu$  vara ett Borel mått på ett separerbart metriskt rum  $(X, d)$  och  $0 < \mu(X) < \infty$ . Låt  $E$  vara en  $\mu$ -mätbar delmängd av  $X$ . Vi kallar  $\mu$  för en massfördelning på  $E$  om  $\mu(E) = \mu(X)$  d.v.s. om  $\mu(X \setminus E) = 0$ .

För att förstå en massfördelning kan man göra en analogi med människokroppen. En människa har en given massa som är fördelad på olika kroppsdelar, t.ex. foten. Massan för de olika kroppsdelarna är också fördelad på mindre kroppsdelar, t.ex. tårna. Man använder sig ofta av en mängds självlikhet (se sektionerna 1.2 och 3.2) för att enkelt kunna definiera massan för godtyckligt små delmängder av  $E$ .

Ett annat mått som används i avhandlingen är sannolikhetsmått. Ett sannolikhetsmått i ett utfallsrum  $\Omega$  är en funktion  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  där  $\mathcal{F}$  är någon  $\sigma$ -algebra i  $\Omega$ .  $P$  måste uppfylla kraven för ett mått och  $P(X) = 1$ .  $\Omega$  består av alla möjliga utfall för något slumpmässigt försök och elementen i  $\mathcal{F}$  kallas händelser. Trippeln  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  kallas för ett sannolikhetsrum. Om  $A$  är en händelse i  $\mathcal{F}$  så kallar vi  $P(A)$  för sannolikheten för  $A$ . En stokastisk variabel är en variabel vars värde bestäms av utfallet av ett slumpmässigt försök. Tekniskt sätt är en stokastisk variabel en funktion  $Y : \Omega \rightarrow E$  för något mätbart rum  $E$ . Ett exempel på en stokastisk variabel är att den antar värdet 1 om händelsen  $A$  sker och 0 om händelsen  $A$  inte sker. Väntevärdet för en diskret stokastisk variabel  $Y$  i ett sannolikhetsrum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  är  $E(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} \omega P(\omega)$ . Inom statistik och sannolikhetslära används ofta alternativa begrepp, t.ex. kallas  $\sigma$ -algebror för  $\sigma$ -fält.

I samband med att vi behandlar dynamiska system och kaos behövs följande definitioner.

**Definition 1.9.** Mängden  $\{f^k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  för någon punkt  $x \in X$  och någon funktion  $f : X \rightarrow X$  kallas för banan för punkten  $x$ .

**Definition 1.10.** En punkt  $x \in X$  är en fixpunkt för funktionen  $f$  om  $f(x) = x$ . En punkt  $x$  är periodisk för funktionen  $f$  om det existerar ett  $n$  så att  $f^n(x) = x$ . Det minsta tal  $n$  för vilket  $f^n(x) = x$  kallas för punktens period.

**Definition 1.11.** Om  $x$  är en periodisk punkt för funktionen  $f$  med perioden  $n$  så kallar vi mängden  $\{f^k(x)\}_{k=0}^{n-1}$  för punktens periodiska bana.

## 1.2 Intuitiv förståelse av fraktaler

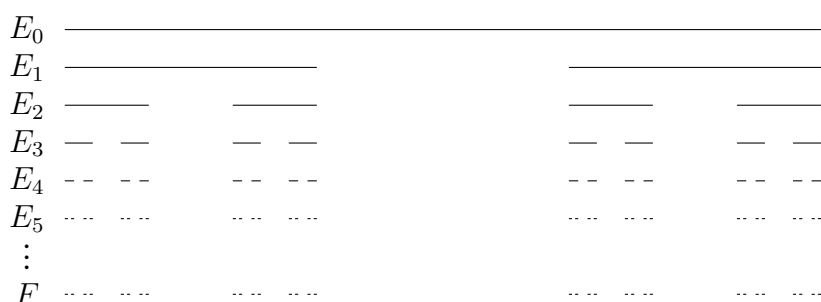
Det finns ingen bra definition för fraktaler som skulle omfatta alla mängder som har fraktala egenskaper. För att få en förståelse för vad en fraktal är kan vi börja med att titta på några typiska exempel på fraktaler. Den här sektionen är baserad på Falconer [12].

Den fraktal som är lättast att konstruera är antagligen Cantormängden (på engelska *the middle third Cantor set*). Cantormängden är bekant för de flesta matematiker eftersom den är ett typiskt exempel på en icke-uppräknelig mängd med Lebesguemåttet



0. Ofta väljer man också Cantormängden som exempel när man försöker förstå någon egenskap hos fraktaler eller en metod för beräkningen av denna.

Cantormängden konstrueras från enhetsintervallet genom att upprepade gånger ta bort den mellersta tredjedelen av de kvarstående intervallen (se figur 1.1). Låt  $E_0$  vara det slutna intervallet  $[0, 1]$  och ta bort den mellersta tredjedelen, så att unionen av  $[0, \frac{1}{3}]$  och  $[\frac{2}{3}, 1]$  återstår. Vi kallar denna mängd  $E_1$ . Vi fortsätter med att ta bort den mellersta tredjedelen av de två komponenterna i  $E_1$  och erhåller  $E_2$  som består av intervallen  $[0, \frac{1}{9}]$ ,  $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ ,  $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$  och  $[\frac{8}{9}, 1]$ . Om vi fortsätter på samma sätt och erhåller  $E_k$  genom att ta bort de mellersta tredjedelarna från komponenterna i  $E_{k-1}$  så kommer  $E_k$  att bestå av  $2^k$  intervall med längden  $3^{-k}$ . Cantormängden  $F$  definieras som snittet  $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$  och består av de tal som är element i varje  $E_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Eftersom  $E_k$  är en delmängd av  $E_{k-1}$  kan man också definiera  $F$  som gränsvärdet av följden mängderna  $E_k$  då  $k$  närmar sig oändligheten  $F = \lim_{k \rightarrow \infty} E_k$ . En formell definition av Cantormängden ges i definition 3.2.



Figur 1.1: De fem första iterationerna  $E_1$  till  $E_5$  i konstruktion av Cantormängden  $F$  och en approximation av denna.

Vad är då Cantormängden? Det är uppenbart att ändpunkterna för varje intervall i varje  $E_k$  är element i Cantormängden, så den är uppenbart icke-tom och åtminstone uppräkneligt oändlig. Vi hävdade redan tidigare att den är ickeuppräknelig, vilket är enkelt att visa med hjälp av en representation av talen i  $[0, 1]$  i basen 3. Mängden  $E_k$  består av alla tal  $0_3 a_1 a_2 a_3 \dots$ , där  $a_i = 0$  eller  $a_i = 2$  för varje positivt heltal  $i \leq k$  (då vi väljer representationen med upprepade tvåor för alla ändpunkter, t.ex.  $1 = 0_3 22 \dots$ ). Med andra ord består Cantormängden av alla tal i enhetsintervallet vars expansion i basen 3 inte innehåller några ettor. Nu kan vi definiera en funktion  $f: F \rightarrow [0, 1]$  som ändrar varje tvåa i tertiärbasrepresentationen till en etta i binärbasrepresentation. Eftersom den här funktionen uppenbart är surjektiv och enhetsintervallet är ouppräkneligt så måste också Cantormängden vara ouppräknelig. Å andra sidan har Cantormängden Lebesguemåttet 0; eftersom varje iteration i konstruktionen av Cantormängden tar bort en tredjedel av det som fanns kvar efter föregående iteration så kommer måttet för varje  $E_k$  att vara  $m(E_k) = (\frac{2}{3})^k$  och  $m(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^k = 0$ . Det här betyder att varje bild av mängden nödvändigtvis är en approximation och i figur 1.1 är  $F$  approximerad av  $E_6$ .

Eftersom Cantormängden har längden 0 och är svår att rita så introducerar vi också några andra klassiska fraktaler före vi tittar närmare på de typiska fraktala egenskaperna som Cantormängden har.

Kochkurvan (se figur 1.2), även kallad von Kochs kurva eller snöflingekurvan, konstrueras på ett liknande sätt som Cantormängden. Låt  $E_0$  vara en sträcka och konstru-

era  $E_1$  genom att rita en liksidig triangel med den mellersta tredjedelen av  $E_0$  som bas och ta bort denna bas.  $E_1$  består då av fyra sammanhängande sträckor med samma längd. Vi erhåller  $E_2$  genom att upprepa processen för dessa fyra sträckor och  $E_k$  genom att upprepa processen för varje sträcka i  $E_{k-1}$ . Kochkurvan är den kurva  $F$  som  $E_k$  närmar sig då  $k$  går mot oändligheten. von Kochs snöflinga (se figur 1.3) består av tre sammanhängande Kochkurvor och är antagligen bekant för de flesta läsare. En formell definition av Kochkurvan ges i sektion 4.1.

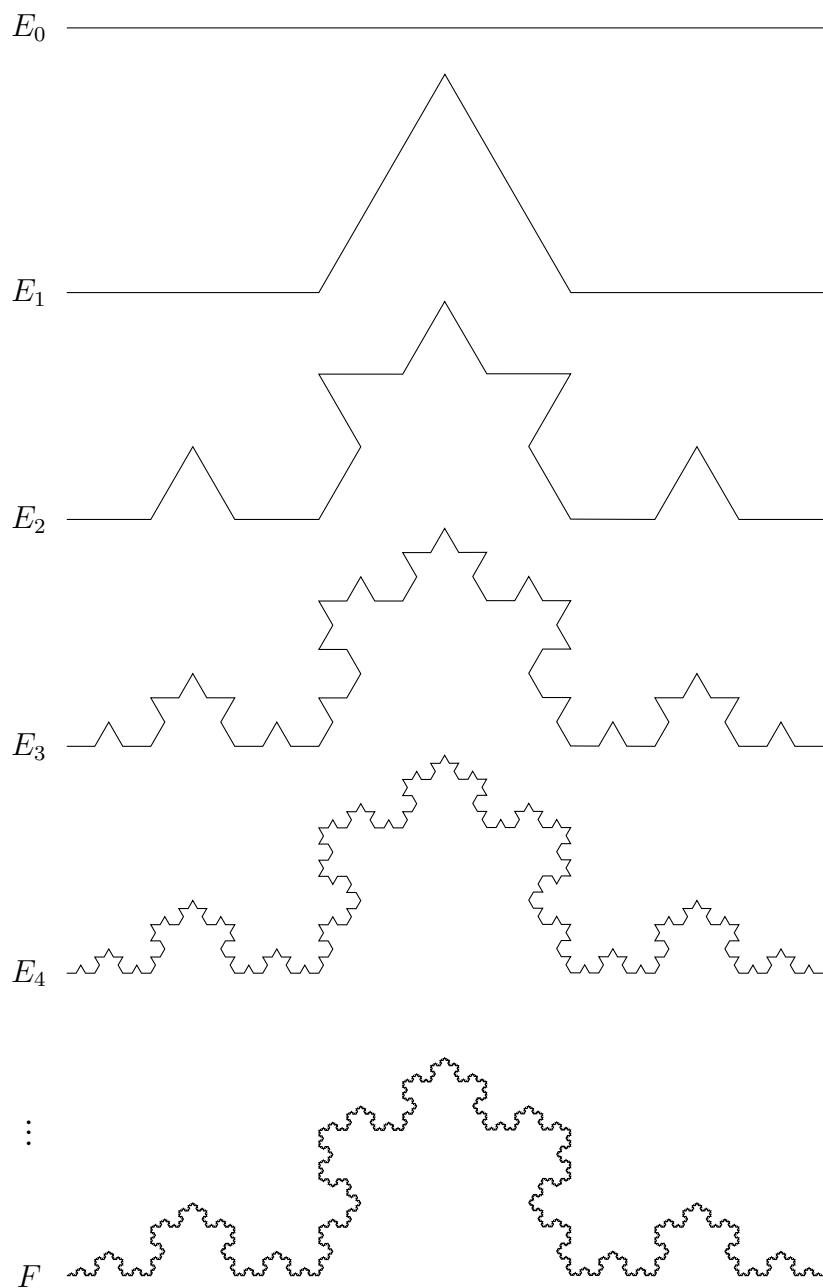
Ett annat exempel på en känd fraktal i planet är Sierpinskiatriangeln (se figur 1.4). Liksom Cantormängden är Sierpinskiatriangeln konstruerad genom att upprepade gånger ta bort mitten av en figur. Låt  $E_0$  vara en liksidig triangel och erhåll  $E_1$  genom att ta bort den mellersta fjärdedelen av triangeln enligt figuren.  $E_1$  består då av tre liksidiga trianglar. Erhåll  $E_2$  genom att ta bort den mittersta fjärdedelen av de tre trianglarna i  $E_1$  och upprepa för att erhålla  $E_k$ . Sierpinskiatriangeln definieras som snittet  $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ . En mera formell definition ges i 3.3.

Vilka egenskaper är gemensamma för dessa mängder?

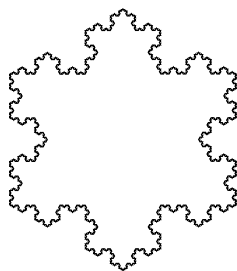
- (i) Vi kan hitta mindre kopior av hela mängden i mängden. Detta är kanske mest tydligt i Sierpinskiatriangeln. Vi säger att mängden är självliknande (på engelska: *emphself-similarity*).
- (ii) Mängderna har en detaljerad struktur på varje nivå, d.v.s. hur mycket vi än zoomar in på någon del av mängden så kommer den aldrig att se ut som en linje.
- (iii) Mängdens geometri är svår att beskriva med samma begrepp som man använder för klassiska geometriska mängder.
- (iv) Mängderna konstrueras med rekursion och då  $k$  blir större utgör  $E_k$  en allt bättre approximation av  $F$ .
- (v) Det är svårt att beskriva mängdens storlek med sedvanliga begrepp: Cantormängden är en ouppräknelig mängd med längden 0, von Kochs kurva är oändligt lång men har ingen area och Sierpinskiatriangeln har inte heller någon area, men skulle vara oändligt lång om man försökte rita en kurva längs den.

Det här är typiska egenskaper hos fraktaler. Alla fraktaler behöver inte ha alla dessa egenskaper, men de bör ha en del eller liknande egenskaper. Exempelvis är självlikheten inte i allmänhet ett krav. Flera fraktaler är istället självaffina (där de små kopiorna av hela mängden inte är skalade i samma proportion i alla riktningar) eller har någon form av ungefärlig eller statistisk självlikhet.

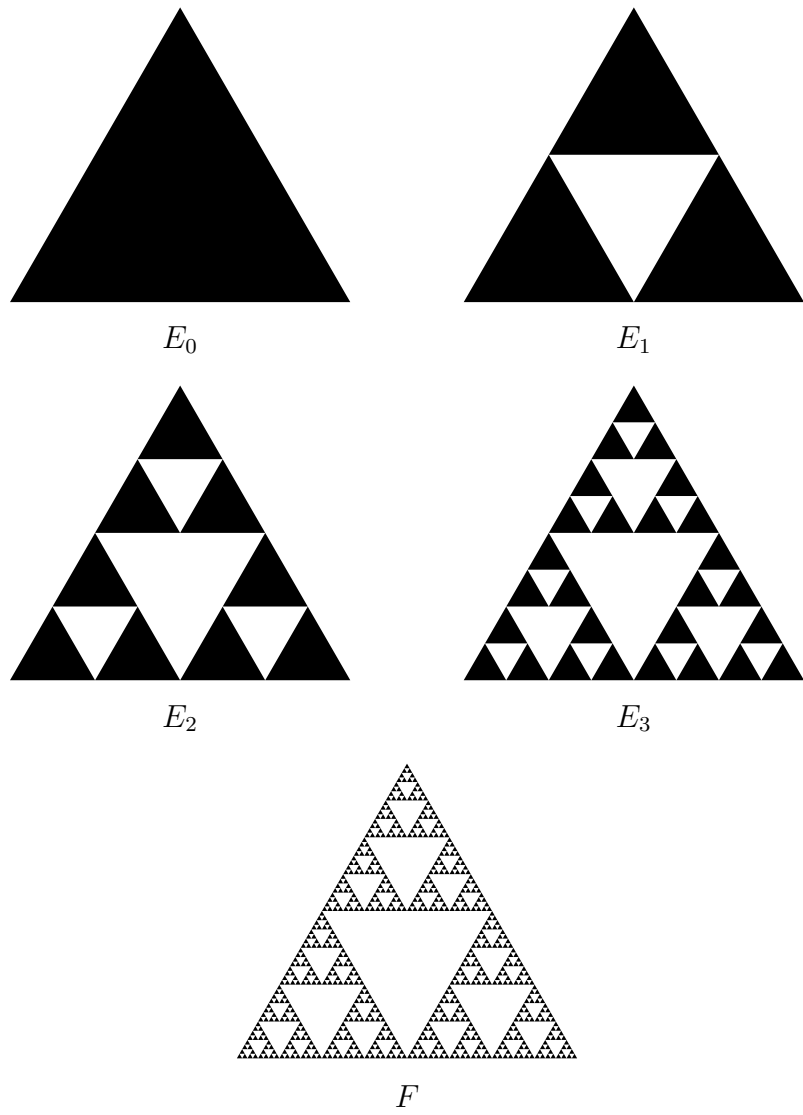
Ofta är man också intresserad av en fraktals fraktaldimension, vilken typiskt är större än mängdens topologiska dimension. Vi undersöker begreppet fraktaldimension i kapitel 2.



Figur 1.2: De första fyra iterationerna i konstruktionen av Kochkurvan  $F$ . Kurvan  $F$  approximeras med  $E_6$ .



Figur 1.3: von Kochs snöflinga.



Figur 1.4: Konstruktionen av Sierpinski-triangeln.

## 2 Fraktaldimension

En fraktaldimension är en generalisering av begreppet dimension. Det finns flera olika fraktaldimensioner som kan ge olika värden för dimensionen för någon given mängd, men gemensamt för alla fraktaldimensioner är att klassiska geometriska figurer som differentierbara kurvor och ytor bör ha samma fraktaldimension som deras topologiska dimension. För mängder som är homeomorfa med punkter, linjer, plana ytor o.s.v. gäller alltså att den topologiska och den fraktala dimensionen är 0, 1, 2, o.s.v. för respektive mängder. En exakt definition på topologisk dimension kan läsas i t.ex. Hurewicz och Wallman [17].

Fraktaldimensionen ger en möjlighet att beskriva fraktalens storlek då mängden t.ex. har en oändlig längd men ingen area. Fraktaler har ofta en dimension som inte är ett heltal och dimensionen är en viktig egenskap när det gäller klassificering av fraktaler. I det här kapitlet undersöker vi två fraktaldimensioner; Minkowskidimensionen och Hausdorffdimensionen och bestämmer deras värde för Cantormängden.

Innehållet i det här kapitlet är baserat på Falconer [12] om inte annat anges.

### 2.1 Hausdorffmått

För att lättare kunna definiera Hausdorffdimensionen och undersöka dess egenskaper definierar vi först Hausdorffmåttet.

**Definition 2.1.** Låt  $(X, d)$  vara ett metriskt rum,  $E \subset X$  och  $s \geq 0$ . Vi definierar  $\mathcal{H}_\delta^s: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  enligt

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ är en } \delta\text{-övertäckning av } E \right\}.$$

Eftersom antalet möjliga  $\delta$ -övertäckningar blir färre då  $\delta$  minskar så måste  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$  vara avtagande med avseende på  $\delta$ . Därför existerar gränsvärdet  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \mathcal{H}_\delta^s(E)$  (kan vara oändligt).

**Definition 2.2** (Hausdorffmåttet). Låt  $(X, d)$  vara ett metriskt rum,  $E \subset X$  och  $s \geq 0$ . Vi definierar  $\mathcal{H}^s: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  enligt

$$\mathcal{H}^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \mathcal{H}_\delta^s(E). \quad (2.1)$$

och kallar  $\mathcal{H}^s(E)$  det (yttre)  $s$ -dimensionella Hausdorffmåttet av  $E$ .

**Sats 2.3.** Det  $s$ -dimensionella Hausdorffmåttet är ett ytttermått på  $X$ .

Ett yttermått på  $X$  är en funktion definierad på  $\mathcal{P}(X)$  med många användbara egenskaper. Kraven för ett yttermått beskrivs i sektion 1.1.

*Bevis.* (i) Det är uppenbart att  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ .

(ii) Låt  $E \subset \bigcup_i E_i$ . Om vi fixerar  $\delta$  så existerar det för ett godtyckligt  $\varepsilon > 0$  en  $\delta$ -övertäckning  $\{U_{i,k}\}$  av  $\bigcup_i E_i$  så att  $\sum_k |U_{i,k}|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(E_i) + 2^{-i}\varepsilon$  för varje  $i$ . Vi får att

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k |U_{i,k}|^s &\leq \sum_i (\mathcal{H}_\delta^s(E_i) + 2^{-i}\varepsilon) \\ &= \sum_i \mathcal{H}_\delta^s(E_i) + \varepsilon \end{aligned}$$

och eftersom  $E \subset \bigcup_{i,k} U_{i,k}$  så gäller

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \sum_{i,k} |U_{i,k}|^s \leq \sum_i \mathcal{H}_\delta^s(E_i) + \varepsilon.$$

Om vi låter  $\varepsilon \rightarrow 0$  så får vi  $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \sum_i \mathcal{H}_\delta^s(E_i)$  och med  $\delta \rightarrow 0$  så följer att  $\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_i \mathcal{H}^s(E_i)$ .

(iii) Om  $\{U_i\}$  är en  $\delta$ -övertäckning av  $E_1$  och  $\{V_i\}$  är en  $\delta$ -övertäckning av  $E_2$  så är  $\{U_i\} \cup \{V_i\}$  en  $\delta$ -övertäckning av  $E_1 \cup E_2$  vilket ger att  $\mathcal{H}_\delta^s(E_1 \cup E_2) \leq \mathcal{H}_\delta^s(E_1) + \mathcal{H}_\delta^s(E_2)$ . Det följer att om  $\{E_i\}$  är en uppräknelig samling mängder så gäller

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(E_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \mathcal{H}_\delta^s(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i). \end{aligned}$$

□

Vidare kan man visa att Hausdorffmåttet är ett Borel mått, d.v.s. att alla Borel delmängder av ett metriskt rum  $X$  är  $\mathcal{H}^s$ -mätbara, se t.ex. Falconer [10, Sats 1.5].

Hausdorffmåttet är ett yttermått som generaliserar Lebesguemåttet. Det 0-dimensionella Hausdorffmåttet är kardinalitetsmåttet och alla andra  $n$ -dimensionella Hausdorffmått, där  $n$  är ett positivt heltal, är proportionella med motsvarande  $n$ -dimensionella Lebesguemått. Falconer visar i [10, sats 1.12] att ett normaliserat  $n$ -dimensionellt Hausdorffmått är identiskt med  $\mathcal{L}^n$  då  $n$  är ett heltal.

Hausdorffmåttet uppför sig väl med avseende på avbildningar som är  $\alpha$ -Hölder-kontinuerliga för något  $\alpha > 0$ .

**Sats 2.4.** Låt  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, c > 0$  och  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$  vara en avbildning som uppfyller

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, \quad (2.2)$$

för alla  $x, y \in E$ . Då gäller

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(E)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(E) \quad (2.3)$$

för alla  $s > 0$ .

*Anmärkning 2.5.* Om  $f$  är Lipschitzkontinuerlig, d.v.s.  $\alpha = 1$ , så gäller

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq c^s \mathcal{H}^s(E). \quad (2.4)$$

*Bevis.* Låt  $\{U_i\}$  vara en  $\delta$ -övertäckning av  $E$ . Då är också  $\{U_i \cap E\}$  det, vilket gör att  $\{f(E \cap U_i)\}$  är en övertäckning av  $f(E)$ . Från (2.2) får vi att

$$|f(E \cap U_i)| \leq c|E \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha \leq c\delta^\alpha,$$

vilket gör  $\{f(E \cap U_i)\}$  till en  $c\delta^\alpha$ -övertäckning av  $f(E)$ . Vidare gäller att

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{s/\alpha}(f(E)) &\leq \inf \left\{ \sum_i |f(E \cap U_i)|^{s/\alpha} : \{U_i\} \text{ är en } \delta\text{-övertäckning av } E \right\} \\ &\leq c^{s/\alpha} \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ är en } \delta\text{-övertäckning av } E \right\} = c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(E). \end{aligned}$$

Om vi låter  $\delta \rightarrow 0$  så får vi (2.3). □

**Följdsats 2.6** (Skalning av Hausdorffmåttet). Låt  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vara en similaritet med skalningsfaktorn  $\lambda$ , d.v.s.  $|f(x) - f(y)| = \lambda|x - y|$  för alla  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Då är

$$\mathcal{H}^s(f(E)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E), \quad (2.5)$$

för alla  $E \subset \mathbb{R}^n$ .

*Bevis.* Eftersom  $f$  är en similaritet så har den en invers  $f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  för vilken  $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| = \lambda^{-1}|x - y|$ . Då både  $f$  och  $f^{-1}$  är Lipschitzkontinuerliga så följer (2.5) från (2.4). □

Följdsats 2.6 visar att det  $s$ -dimensionella Hausdorffmåttet för en mängd  $E$  skalas med en faktor  $\lambda^s$  då mängden  $E$  skalas med faktorn  $\lambda$  i likhet med hur det  $n$ -dimensionella Lebesguemåttet för en mängd  $F$  skalas med  $\lambda^n$  då  $F$  skalas med  $\lambda$ . En annan följd av följsats 2.6 är att Hausdorffmåttet är translations- och rotationsinvariant eftersom translationer och rotationer är isometrier och (2.5) gäller med  $\lambda = 1$ .

**Lemma 2.7.** Om  $E \subset \mathbb{R}^n$  och  $s > n$  så är  $\mathcal{H}^s(E) = 0$ .

*Bevis.* Låt  $F$  vara den  $n$ -dimensionella enhetskuben  $[0, 1]^n$ ,  $m$  ett positivt heltal och  $\{U_i\}$  vara en övertäckning med  $m^n$  stycken  $\frac{1}{m}$ -nätkuber av  $F$ . Då är nätkubens diameter  $\frac{\sqrt{n}}{m}$  och

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{m}}^s(F) \leq \sum_{i=1}^{m^n} |U_i|^s = m^n \left( \frac{\sqrt{n}}{m} \right)^s = m^{n-s} (\sqrt{n})^s.$$

Om  $s > n$  så  $m^{n-s}(\sqrt{n})^s \rightarrow 0$  då  $m \rightarrow \infty$  och  $\mathcal{H}^s(F) = 0$ . Vidare så är  $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$  eftersom Hausdorffmåttet är subadditivt och translationsinvariant och  $\mathbb{R}^n$  består av ett uppräknligt antal kuber med samma mått som  $F$ . □

## 2.2 Hausdorffdimension

En ledtråd till vad Hausdorffdimensionen är finns i begreppet *det  $s$ -dimensionella Hausdorffmåttet*. Hausdorffmåttet är definierat för alla  $s$  men för nästan alla värden på  $s$  är Hausdorffmåttet antingen 0 eller  $\infty$ .

**Sats 2.8.** För varje delmängd  $E \subset \mathbb{R}^n$  finns det ett unikt  $0 \leq s < \infty$  för vilket

$$\mathcal{H}^t(E) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq t < s \\ 0, & t > s \end{cases}. \quad (2.6)$$

*Bevis.* Låt  $\{U_i\}$  vara en  $\delta$ -övertäckning av  $E$  och  $0 \leq a < b$ . Då gäller att

$$\sum_i |U_i|^b = \sum_i |U_i|^{b-a} |U_i|^a \leq \delta^{b-a} \sum_i |U_i|^a.$$

Vi får

$$\mathcal{H}_\delta^b(E) \leq \delta^{b-a} \mathcal{H}_\delta^a(E) \quad \text{och} \quad \mathcal{H}_\delta^a(E) \geq (1/\delta^{b-a}) \mathcal{H}_\delta^b(E),$$

och då vi låter  $\delta \rightarrow 0$  så ser vi att

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^a(E) < \infty &\implies \mathcal{H}^b(E) = 0 \\ \mathcal{H}^b(E) > 0 &\implies \mathcal{H}^a(E) = \infty. \end{aligned}$$

Lemma 2.7 ger att  $\mathcal{H}^t(E) = 0$  för alla  $t > n$  vilket bevisar satsen.  $\square$

För delmängder i något annat metriskt rum  $(X, d)$  gäller också att det finns ett unikt  $s$  som satisfierar (2.6) men detta  $s$  kan också anta värdet  $\infty$ . Sats 2.8 lägger grunden för definitionen av Hausdorffdimensionen.

**Definition 2.9.** Hausdorffdimensionen för en mängd  $E \subset X$  definieras som

$$\dim_H E = \inf\{0 \leq s \leq \infty : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{0 \leq s \leq \infty : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}. \quad (2.7)$$

Från definitionen av Hausdorffdimensionen följer att  $\mathcal{H}^{\dim_H E}(E) \in [0, \infty]$ . Vi visar att Hausdorffdimensionen, liksom Hausdorffmåttet, beter sig väl för Hölder-, Lipschitz- och bilipschitz-kontinuerliga funktioner för att kunna räkna upp några egenskaper.

**Sats 2.10.** (a) Låt  $\alpha, c > 0$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  och  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Om

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (2.8)$$

gäller för alla  $x, y \in E$  så är  $\dim_H f(E) \leq (1/\alpha) \dim_H E$ .

(b) Låt  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  och  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Om

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad (2.9)$$

gäller för alla  $x, y \in E$  så är  $\dim_H f(E) = \dim_H E$ .

*Bevis.* (a) Sats 2.4 ger att  $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(E)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(E)$  och enligt sats 2.8 så är  $\mathcal{H}^s(E) = 0$  för alla  $s > \dim_H E$ , vilket ger att  $\dim_H f(E) \leq (1/\alpha) \dim_H E$ .



- (b) Eftersom  $f$  är bilipschitzkontinuerlig så har den en invers  $f^{-1}: f(E) \rightarrow E$ . Om  $u, v \in f(E)$  och vi väljer  $x = f^{-1}(u), y = f^{-1}(v)$  så gäller

$$|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)| \leq \frac{1}{c_1} |f(f^{-1}(u)) - f(f^{-1}(v))| = \frac{1}{c_1} |u - v|$$

och  $f^{-1}$  är Lipschitzkontinuerlig. Då gäller  $\dim_H E = \dim_H f^{-1}(f(E)) \leq \dim_H f(E)$  vilket tillsammans med (a) för  $\alpha = 1$  bevisar (b). □

**Sats 2.11.** Följande egenskaper gäller för Hausdorffdimensionen.

- (a) Hausdorffdimensionen är monoton, d.v.s om  $E \subset F$  så är  $\dim_H E \leq \dim_H F$ .
- (b) Om  $\{E_i\}$  är en uppräknelig samling mängder så är  $\dim_H (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sup\{\dim_H E_i\}$ .
- (c) Om  $E$  är en uppräknelig mängd så är  $\dim_H E = 0$ .
- (d) Om  $E \subset \mathbb{R}^n$  så är  $\dim_H E \in [0, n]$ .
- (e) Om  $E$  är en öppen delmängd av  $\mathbb{R}^n$  så är  $\dim_H E = n$ .
- (f) Hausdorffdimensionen är geometriskt invariant; om  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  är en affin avbildning på  $\mathbb{R}^n$  och  $E \subset \mathbb{R}^n$  så är  $\dim_H f(E) = \dim_H E$ .
- (g) Om  $E$  är en slät  $m$ -dimensionell mångfald (d.v.s. ett topologiskt rum som är homeomorfiskt med ett  $m$ -dimensionellt euklidiskt rum i någon omgivning av varje punkt i rummet, eng: manifold) så är  $\dim_H E = m$ .

*Bevis.* 1. (a) följer från sats 2.3 och (d) följer från sats 2.8.

- 2. (a) ger att om  $\{E_i\}$  är en uppräknelig samling mängder så är  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \geq \dim_H E_j$  för varje  $j$  och sats 2.8 ger tillsammans med Hausdorffmåttets subadditivitet att  $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i) = 0$  om  $s > \sup\{\dim_H E_i\}$ , vilket bevisar (b).
- 3. Om  $E_i$  består av ett element så är  $\mathcal{H}^0(E_i) = 1$  och  $\dim_H E_i = 0$ . Därmed följer (c) från (b).
- 4. För varje öppen delmängd  $E \subset \mathbb{R}^n$  finns det ett klot  $B \subset E$ . Det går att visa att  $0 < \mathcal{H}^n(U) < \infty$  för varje klot  $U \subset \mathbb{R}^n$  genom att modifiera motsvarande bevis för  $\mathcal{L}^n(U)$ . Därmed följer (e) från (a) och (d).
- 5. Varje affin avbildning på  $\mathbb{R}^n$  är bilipschitz. Alltså följer (f) från sats 2.10.
- 6. För varje punkt i en slät  $m$ -dimensionell mångfald  $E$  finns det en omgivning  $M$  som är homeomorf med ett öppet klot i  $\mathbb{R}^m$ . Denna homeomorfi är kontinuerligt differentierbar och därmed bilipschitz. Därmed följer (g) från sats 2.10. □

*Anmärkning 2.12.* Att  $0 < \mathcal{H}^n(B) < \infty$  som vi använde i del 4 av beviset är en direkt följd av att  $c_n \mathcal{H}^n(B) = \mathcal{L}^n(B)$ , där  $c_n$  är en positiv normaliseringskonstant som bara beror på  $n$ , vilket bevisas i bl.a. [10].

Vi har visat att Hausdorffdimensionen har egenskaper som känns viktiga för en generalisering av begreppet dimension, framförallt att Hausdorffdimensionen för klassiska geometriska figurer är densamma som dess topologiska dimension. Fraktaler har i allmänhet en Hausdorffdimension som är strikt större än dess topologiska dimension och när begreppet fraktal först myntades av Benoît Mandelbrot definierades det just på det viset [21]. Tyvärr är Hausdorffdimensionen för en fraktal ofta svår att beräkna. Innan vi påvisar detta med ett exempel i sektion 2.5 definierar vi Minkowskidimensionen, som i många fall är lättare att beräkna men som har andra nackdelar.

## 2.3 Minkowskidimension

Till skillnad från Hausdorffdimensionen har Minkowskidimensionen en intuitiv och ganska enkel definition. Av denna anledning kallas den också ibland för fraktaldimension, vilket är aningen missvisande då det antyder att det bara finns ett sätt att definiera en dimension för fraktaler. En vanlig alternativ benämning är lådräkningsdimensionen (från engelskans *box-counting dimension*). Vi kommer här att undersöka två av de olika ekvivalenta definitionerna som finns. För flera definitioner, se [12, sektion 2.1].

Om vi har någon delmängd  $E \subset \mathbb{R}^n$  med den topologiska dimensionen  $d$  så gäller att det minsta antalet mängder som utgör en  $\delta$ -övertäckning av  $E$  kommer att öka i det närmaste proportionellt mot  $(\frac{1}{\delta})^d$  när  $\delta$  närmar sig 0. T.ex. gäller att antalet fyllda cirklar med diametern  $\frac{\sqrt{2}}{m}$  som krävs för att täcka enhetskvadraten är ungefär  $m^2$  för alla positiva heltal  $m$ . Vi definierar Minkowskidimensionen utgående från en generalisering av detta faktum.

**Definition 2.13.** Låt  $(X, d)$  vara ett metriskt rum,  $E \subset X$  vara begränsad och icke-tom,  $0 < \delta < 1$  och

$$N_\delta(E) = \min \{ \# \{U_i\} : \{U_i\} \text{ är en } \delta\text{-övertäckning av } E. \}. \quad (2.10)$$

Den undre och övre Minkowskidimensionen av  $E$  definieras som

$$\dim_{LB} E = \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \quad (2.11)$$

respektive

$$\dim_{UB} E = \limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta}. \quad (2.12)$$

Om  $\dim_{LB} E = \dim_{UB} E$  så kallar vi

$$\dim_B E = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta}. \quad (2.13)$$

för Minkowskidimensionen av  $E$ .

*Anmärkning 2.14.* Det är givet att  $\dim_{LB} E \leq \dim_{UB} E$  för alla  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Vi använder oss av beteckningarna  $\dim_{LB}$ ,  $\dim_{UB}$  och  $\dim_B$  efter engelskans *lower and upper box-counting dimension*.

Om vi undersöker hur (2.13) skulle se ut utan gränsvärdet för små  $\delta$  så inser vi att det utöver kvoten  $\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta}$  också kan finnas en term  $\frac{-\log c}{-\log \delta}$  för någon konstant  $c$ , vilken försvinner då vi låter  $\delta \rightarrow 0$ . Därför kan Minkowskidimensionen approximeras med

$$\dim_B E \approx \frac{\log N_\delta(E) - \log c}{-\log \delta}$$

vilket ger

$$N_\delta(E) \approx c\delta^{-\dim_B E} \quad (2.14)$$

för någon konstant  $c$  och tillräckligt små  $\delta$ , vilket motsvarar vad vi sökte med denna generalisering av den topologiska dimensionen.

En alternativ definition av Minkowskidimensionen för delmängder av  $\mathbb{R}^n$  använder sig av ett  $\delta$ -nät. Om vi istället för att undersöka det minsta antal mängder som behövs för att täcka en mängd  $E$  undersöker antalet  $\delta$ -nätkuber som innehåller element av  $E$  (därför namnet *box-counting dimension*) får vi en ekvivalent definition.

**Sats 2.15.** Om  $E \subset \mathbb{R}^n$  är begränsad och icke-tom,  $0 < \delta < 1$  och

$$N'_\delta(E) = \{\#\{U_i\} : U_i \text{ är } \delta\text{-nätkuber och } U_i \cap E \neq \emptyset\}$$

så gäller

$$\dim_{LB} E = \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N'_\delta(E)}{-\log \delta}, \quad (2.15)$$

$$\dim_{UB} E = \limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N'_\delta(E)}{-\log \delta} \quad (2.16)$$

och om  $\dim_{LB} E = \dim_{UB} E$  så gäller

$$\dim_B E = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N'_\delta(E)}{-\log \delta}. \quad (2.17)$$

*Bevis.* Eftersom de  $N'_\delta(E)$  olika  $\delta$ -nätkuberna har diametern  $\delta\sqrt{n}$  och utgör en  $\delta\sqrt{n}$ -övertäckning av  $E$  så gäller  $N_{\delta\sqrt{n}}(E) \leq N'_\delta(E)$ . Vi kan också konstatera att om  $3^n$  stycken  $n$ -dimensionella kuber med sidlängden  $\delta$  placeras intill varandra så att deras union är en  $n$ -dimensionell kub med sidlängden  $3\delta$  så är minsta avståndet från denna kubs mittpunkt till dess utsida  $\frac{3}{2}\delta$  och kuben kan täcka varje mängd vars diameter är högst  $\delta$ . Då är  $N'_\delta(E) \leq 3^n N_\delta(E)$ . Genom att kombinera dessa olikheter, ta logaritmen av dem och dividera med  $-\log \delta$  får vi

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N'_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 3^n + \log N_\delta(E)}{-\log \delta}.$$

Om vi låter  $\delta \rightarrow 0$  så får vi

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(E)}{-\log \delta} = \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(E)}{-\log(\delta\sqrt{n}) + \log \sqrt{n}} = \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta}$$

eftersom  $\log \sqrt{n}$  är en konstant som inte påverkar gränsvärdet och på motsvarande sätt gäller

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log 3^n + \log N_\delta(E)}{-\log \delta} = \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta}.$$

Då är

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N'_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta}$$

vilket bevisar (2.15). Beviset för (2.16) följer samma steg men med  $\limsup$  istället för  $\liminf$  och (2.17) är en självklar följd.  $\square$

Sats 2.15 ger en användbar metod för att experimentellt beräkna eller approximera Minkowskidimensionen för mängder som man har en bild av. Vi har nämligen ett i stort sett linjärt beroende

$$\log N'_\delta(E) \approx -(\dim_B E) \log \delta + \log c. \quad (2.18)$$

Vi kan då enkelt uppskatta dimensionen för mängden  $E$  utgående från några mätvärden vilket vi demonstrerar i kapitel 7.

Liksom Hausdorffdimensionen uppför sig Minkowskidimensionen väl för Lipschitz- och bilipschitzkontinuerliga funktioner, vilket hjälper oss att visa några egenskaper för Minkowskidimensionen.

**Sats 2.16.** (a) Låt  $c > 0$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  och  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Om

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad (2.19)$$

gäller för alla  $x, y \in E$  så är  $\dim_{LB} f(E) \leq \dim_{LB} E$  och  $\dim_{UB} f(E) \leq \dim_{UB} E$ .

(b) Låt  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  och  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Om

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad (2.20)$$

gäller för alla  $x, y \in E$  så är  $\dim_{LB} f(E) = \dim_{LB} E$  och  $\dim_{UB} f(E) = \dim_{UB} E$ .

*Bevis.* (a) Låt  $\{U_i\}$  vara en  $\delta$ -övertäckning av  $E$ . Då är också  $\{U_i \cap E\}$  det, vilket gör att  $\{f(E \cap U_i)\}$  är en övertäckning av  $f(E)$ . Från (2.19) får vi att  $|f(E \cap U_i)| \leq c|E \cap U_i| \leq c|U_i| \leq c\delta$ , vilket gör  $\{f(E \cap U_i)\}$  till en  $c\delta$ -övertäckning av  $f(E)$ . Därför är  $N_{c\delta}(f(E)) \leq N_\delta(E)$  för alla  $\delta > 0$ . Om vi tar logaritmen av olikheten och dividerar med  $-\log \delta$  så får vi

$$\frac{\log N_{c\delta}(f(E))}{-\log(c\delta) + \log c} \leq \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta}.$$

Genom att ta nedre och övre gränsvärdet för olikheten får vi de sökta olikheterna.

(b) Eftersom  $f$  är bilipschitz så har den en invers  $f^{-1}: f(E) \rightarrow E$ , som är Lipschitzkontinuerlig liksom i beviset för sats 2.10. Därför gäller att  $\dim_{LB} E \leq \dim_{LB} f^{-1}(f(E)) \leq \dim_{LB} f(E)$  och  $\dim_{UB} E \leq \dim_{UB} f^{-1}(f(E)) \leq \dim_{UB} f(E)$  vilket tillsammans med (a) avslutar beviset. □

**Sats 2.17.** Följande egenskaper gäller för Minkowskidimensionen.

(a) Minkowskidimensionen är monoton, d.v.s om  $E \subset F$  så är  $\dim_{LB} E \leq \dim_{LB} F$  och  $\dim_{UB} E \leq \dim_{UB} F$ .

(b) Om  $\{E_i\}$  är en ändlig samling mängder med  $\#\{E_i\} = k$  så är  $\dim_{UB} \left( \bigcup_{i=1}^k E_i \right) = \max\{\dim_{UB} E_i\}$ .

(c) Om  $E$  är en ändlig mängd så är  $\dim_B E = 0$ .

(d) Om  $E \subset \mathbb{R}^n$  är icke-tom och begränsad så är  $0 \leq \dim_{LB} E \leq \dim_{UB} E \leq n$ .

(e) Om  $E$  är en öppen delmängd av  $\mathbb{R}^n$  så är  $\dim_B E = n$ .

(f) Minkowskidimensionen är geometriskt invariant; om  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  är en affin avbildning på  $\mathbb{R}^n$  och  $E \subset \mathbb{R}^n$  så är  $\dim_{LB} f(E) = \dim_{LB} E$  och  $\dim_{UB} f(E) = \dim_{UB} E$ .

(g) Om  $E$  är en slät  $m$ -dimensionell mångfald så är  $\dim_B E = m$ .

*Bevis.* (a) Om  $E \subset F$  så är  $N_\delta(E) \leq N_\delta(F)$  för alla  $\delta$ .

(b) Eftersom  $N_\delta(E \cup F) \leq N_\delta(E) + N_\delta(F)$  så gäller

$$\frac{\log N_\delta(E \cup F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log(N_\delta(E) + N_\delta(F))}{-\log \delta} \leq \frac{\log(\max\{N_\delta(E), N_\delta(F)\} + \log 2)}{-\log \delta},$$

vilket ger att  $\dim_{UB}(E \cup F) \leq \max\{\dim_{UB} E, \dim_{UB} F\}$ . Eftersom Minkowskidimensionen är monoton så är  $\max\{\dim_{UB} E, \dim_{UB} F\} \leq \dim_{UB}(E \cup F)$  och (b) är en direkt följd av  $\dim_{UB}(E \cup F) = \max\{\dim_{UB} E, \dim_{UB} F\}$ .

(c) Om  $\#E = k < \infty$  så är  $N_\delta(E) \leq k$  för alla  $\delta$ .

(d) De två första olikheterna följer från Minkowskidimensionens definition och den tredje gäller eftersom Minkowskidimensionen är monoton och  $E \subset F$  för någon  $n$ -dimensionell kub  $F$  med  $\dim_B F = n$ .

(e) Om  $E$  är öppen så finns det en  $n$ -dimensionell kub  $F \subset E$  för vilken  $N'_\delta(F) \geq c\delta^{-n}$  där  $c$  är en konstant som bara beror på kubens storlek och  $n$ . Eftersom

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log c\delta^{-n}}{-\log \delta} = n$$

så följer (e) från (a).

(f) Eftersom varje affin avbildning på  $\mathbb{R}^n$  är bilipschitz så följer (f) från sats 2.16.

(g) För varje punkt i en slät  $m$ -dimensionell mångfald  $E$  finns det en omgivning  $M$  som är homeomorf med ett öppet klot i  $\mathbb{R}^m$ . Denna homeomorfi är kontinuerligt differentierbar och därmed bilipschitz. Att  $\dim_B E = m$  följer från sats 2.16. □

Notera att (b) och (c) inte säger något om uppräknliga samlingar respektive mängder, vilket vi ser orsaken till i nästa sats.

**Sats 2.18.** För det slutna höljet av en icke-tom, begränsad mängd  $E \subset \mathbb{R}^n$  gäller  $\dim_{LB} \overline{E} = \dim_{LB} E$  och  $\dim_{UB} \overline{E} = \dim_{UB} E$ .

*Bevis.* Låt  $\{U_i\}$  vara en ändlig samling mängder med  $|U_i| \leq \delta$  för varje  $i \leq j = \#\{U_i\}$ . Då är  $E \subset \bigcup_{i=1}^j \overline{U_i}$  om och endast om  $\overline{E} \subset \bigcup_{i=1}^j \overline{U_i}$ . Därför är  $N_\delta(E) = N_\delta(\overline{E})$  vilket bevisar satsen. □

Utgående från sats 2.18 kan vi lätt hitta fall där  $\dim_{UB}(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) > \sup\{\dim_{UB} E_i\}$  med strikt olikhet då det rör sig om en uppräknelig union. Ett exempel är Minkowskidimensionen för  $\mathbb{Q}$ , vilket är en uppräknelig mängd och intuitivt borde ha dimensionen 0. Eftersom  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  så är  $\dim_B \mathbb{Q} = 1$ . Detta är inte önskvärt för en dimension, men eftersom Minkowskidimensionen är enkel att uppskatta för många mängder så fyller den ändå en viktig funktion. Det är också möjligt att modifiera definitionen av Minkowskidimensionen för att undvika dessa problem, se [12, sektion 2.3].

## 2.4 Samband mellan Minkowski- och Hausdorffdimensionen

För många mängder, inte minst alla klassiska geometriska figurer, gäller att Hausdorff- och Minkowskidimensionen är densamma, men detta gäller inte i allmänhet. Ett mot-exempel är  $\mathbb{Q}$ ; som vi såg i slutet av sektion 2.3 är  $\dim_B \mathbb{Q} = 1$  medan  $\dim_H \mathbb{Q} = 0$  enligt sats 2.11 eftersom  $\mathbb{Q}$  är uppräknelig. Däremot gäller att Hausdorffdimensionen aldrig är större än Minkowskidimensionen.

**Sats 2.19.** *För varje icke-tom, begränsad delmängd  $E \subset \mathbb{R}^n$  så är*

$$\dim_H E \leq \dim_{LB} E \leq \dim_{UB} E. \quad (2.21)$$

*Bevis.* Om  $\mathcal{H}^s(E) = 0$  för alla  $s \geq 0$  så är olikheten trivial. Därför kan vi anta att  $\mathcal{H}^s(E) > 0$  för något  $s \geq 0$  så att  $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E) = \lambda^s \lim_{\delta \rightarrow 0+} \mathcal{H}_\delta^s(E) > 1$  för något  $\lambda \geq 1$ . Då gäller också  $\lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(E) > 1$  för tillräckligt små  $\delta$ . Eftersom  $E$  är begränsad och det finns en  $\delta$ -övertäckning av  $E$  bestående av  $N_\delta(E)$  mängder så är

$$1 < \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \lambda^s \delta^s N_\delta(E).$$

Om vi tar logaritmen av båda sidorna av olikheten så får vi att  $0 < \log N_\delta(E) + s \log(\lambda \delta)$ . Då gäller

$$s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta - \log \lambda} = \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} = \dim_{LB} E$$

för alla  $s$  som satisfierar  $\mathcal{H}^s(E) > 0$ . Eftersom  $\dim_H(E) = \sup\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}$  så är beviset avslutat.  $\square$

Detta samband kan vara användbart vid beräkningen av Hausdorffdimensionen för en fraktal.

## 2.5 Beräkning av Minkowski- och Hausdorffdimensionen

Härefter visar vi exempel på hur man kan beräkna Minkowski- och Hausdorffdimensionen för fraktaler. Fraktalen som vi önskar beräkna dimensionen för är Cantormängden. Först bevisar vi en sats som gör beräkningen av Minkowskidimensionen lättare.

**Sats 2.20.** *Låt  $\delta_k$  vara en följd som går monotont mot 0 när  $k \rightarrow \infty$  och för vilken  $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$  för något  $0 < c < 1$ . Om  $E$  är en icke-tom, begränsad delmängd av  $\mathbb{R}^n$  så gäller*

$$\dim_{LB} E = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(E)}{-\log \delta_k} \quad (2.22)$$

och

$$\dim_{UB} E = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(E)}{-\log \delta_k}. \quad (2.23)$$

*Bevis.* Om  $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$  så är

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \geq \frac{\log N_{\delta_k}(E)}{-\log \delta_{k+1}} = \frac{\log N_{\delta_k}(E)}{-\log \delta_k - \log(\delta_{k+1}/\delta_k)} \geq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(E)}{-\log \delta_{k+1} - \log c}$$

och

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_k}(E)}{-\log \delta_{k+1}} = \frac{\log N_{\delta_k}(E)}{-\log \delta_{k+1} - \log(\delta_k/\delta_{k+1})} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(E)}{-\log \delta_{k+1} + \log c},$$

vilket ger

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(E)}{-\log \delta_k}$$

respektive

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(E)}{-\log \delta_k}.$$

De motsatta olikheterna är triviala. □

*Anmärkning 2.21.* Notera att eftersom  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(E)}{-\log \delta_k} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(E)}{-\log \delta_{k+1}}$  och motsvarande likhet gäller för nedre gränsvärdet så gäller resultatet också bl.a. om  $\delta_k \leq \delta < \delta_{k-1}$ .

**Exempel 2.22.** Minkowskidimensionen för Cantormängden  $F$  (se sektion 1.2) är  $\dim_B F = \log 2 / \log 3$ .

*Lösning.* Om  $3^{-k} \leq \delta < 3^{-k+1}$ , där  $k$  är ett positivt heltal så är de  $2^k$  intervallen med längden  $3^{-k}$  i  $E_k$  en  $\delta$ -övertäckning av  $F$  och  $N_\delta(F) \leq 2^k$ . Å andra sidan överlappar varje mängd med längden  $\delta$  högst två av intervallen i  $E_k$  då avstånden mellan dem är åtminstone  $3^{-k}$ . Eftersom varje intervall i  $E_k$  innehåller element i  $F$  så är  $N_\delta(F) \geq 2^{k-1}$ . Då gäller att

$$\dim_{UB} F = \limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-k+1}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 2}{(k-1) \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

och

$$\dim_{LB} F = \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^{k-1}}{\log 3^{-k}} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1) \log 2}{k \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Eftersom  $\log 2 / \log 3 \leq \dim_{LB} F \leq \dim_{UB} F \leq \log 2 / \log 3$  så är resultatet klart.

Vi kan också beräkna dimensionen utgående från sats 2.20 genom att konstatera att  $\delta_k = 3^{-k}$  uppfyller kraven  $\delta_k \rightarrow 0$  då  $k \rightarrow \infty$  och  $\delta_{k+1} \geq 3^{-1} \delta_k$  samt att  $N_{\delta_k} = 2^k$ . Därmed är

$$\dim_{LB} F = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

och

$$\dim_{UB} F = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

□

Detta exempel visar en typisk beräkning av Minkowskidimensionen för en fraktal. Cantormängden är en av de lättaste fraktalerna att beräkna dimensionen på, men trots det ser vi i nästa exempel att Hausdorffdimensionen inte är lika enkel att beräkna.

**Exempel 2.23.** Hausdorffdimensionen för Cantormängden  $F$  (se sektion 1.2) är  $\dim_H F = \log 2 / \log 3$ .

*Lösning.* Det första man bör göra när man försöker beräkna Hausdorffdimensionen för en fraktal är att hitta något värde  $s$  som är rimligt och sedan undersöka det. Hausdorffdimensionens definition gör att man behöver visa att  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$  och  $t < s$  implicerar  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$  eller  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  och  $t > s$  implicerar  $\mathcal{H}^t(F) = 0$ . Helst vill man visa att  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ , vilket genast bevisar att  $s = \dim_H F$ .

Eftersom  $\dim_B F = \log 2 / \log 3$  enligt exempel 2.22 så är  $s = \log 2 / \log 3$  en bra utgångspunkt. Vi börjar med att visa att  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

Genom hela lösningen använder vi det faktum att  $3^s = 3^{(\log 2 / \log 3)} = 2$ . Eftersom de  $2^k$  intervallen i  $E_k$  utgör en  $3^{-k}$ -övertäckning för  $F$  så är det enkelt att se att

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^k} |3^{-k}|^s = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k 3^{-ks} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k 2^{-k} = 1,$$

då  $s = \log 2 / \log 3$ .

Sedan vill vi visa att  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  genom att visa att  $\sum_i |U_i|^s > 0$  för alla övertäckningar av  $F$ . Eftersom  $F \subset [0, 1]$  så kan vi anta att varje  $U_i$  är ett intervall som kan förstoras lite för att bli ett öppet intervall. Eftersom  $F$  p.g.a. sin konstruktion är kompakt så räcker det därför att undersöka ändliga övertäckningar vars element är delintervall av enhetsintervallet.

För varje  $U_i$  i någon sådan övertäckning  $\{U_i\}$  väljer vi heltalet  $k_i$  så att

$$3^{-k_i-1} \leq |U_i| < 3^{-k_i}$$

och undersöker hur många intervall i  $E_j$  som kan täckas av  $U_i$  då  $j \geq k_i$ . Eftersom avstånden mellan intervallen i  $E_{k_i}$  är minst  $3^{-k_i}$  så kan  $U_i$  överlappa högst ett av dem. Vidare kan  $U_i$  överlappa högst  $2^{j-k_i}$  av intervallen i  $E_j$ , vilket kan begränsas uppifrån enligt

$$2^j 2^{-k_i} = 2^j (3^{-k_i})^s = 2^j 3^s (3^{-k_i-1})^s \leq 2^j 3^s |U_i|^s.$$

Om vi väljer  $j > \max_i \{k_i\}$ , d.v.s. så att  $3^{-j-1} \leq |U_i|$  för alla  $U_i$  i  $\{U_i\}$ , så kommer  $\{U_i\}$  att överlappa alla  $2^j$  intervall i  $E_j$ . Från

$$2^j \leq \sum_i 2^{j-k_i} \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s = 2^j 3^s \sum_i |U_i|^s$$

får vi att  $\sum_i |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}$  för alla övertäckningar, då  $s = \log 2 / \log 3$ .

Eftersom  $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$  då  $s = \log 2 / \log 3$  så är  $\dim_H F = s$ . □

Det märks redan från ett exempel att det kan vara relativt svårt att beräkna Hausdorffdimensionen för fraktaler. För Cantormängden och fraktaler som konstrueras på liknande sätt gäller det i allmänhet att  $\dim_H F = \dim_B F$  och det finns en mycket effektiv metod för att beräkna dessa, vilket visas i sektion 3.2. För andra fraktaler kan det vara riktigt svårt att beräkna Hausdorffdimensionen.

En metod för att underlätta beräkningen av den undre gränsen för  $\dim_H F$  använder sig av massfördelningar (se definition 1.8). Principen är att välja en massfördelning  $\mu$  på  $F$  så att  $c|U|^s \geq \mu(U)$  för något  $c > 0$  och alla  $U$  som är tillräckligt små och sålunda visa att  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  för det  $s$  som vi vill undersöka.



**Sats 2.24.** Låt  $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  vara en massfördelning på  $E \subset X$  och anta att det för ett  $s > 0$  existerar sådana tal  $c, \varepsilon > 0$  så att

$$\mu(U) \leq c|U|^s \quad (2.24)$$

för alla  $U \subset X$  sådana att  $|U| \leq \varepsilon$ . Då är  $\mathcal{H}^s(E) \geq c^{-1}\mu(E) > 0$  och  $\dim_H E \geq s$ .

*Bevis.* Låt  $\{U_i\}$  vara en  $\varepsilon$ -övertäckning av  $E$ . Då gäller

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$$

eftersom  $\mu$  är ett mått och (2.24) gäller för varje  $U_i$ . Det följer att

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ är en } \delta\text{-övertäckning av } E \right\} \geq c^{-1}\mu(E)$$

för varje  $\delta \leq \varepsilon$  och eftersom  $\mu(E) > 0$  så gäller  $\dim_H E \geq s$ .  $\square$

Vi behöver massfördelningsprincipen i senare kapitel. För att få en uppfattning om hur den kan tillämpas visar vi nu hur en massfördelning på Cantormängden  $F$  kan användas för att bevisa att  $\dim_H F \geq \log 2 / \log 3$ . Vi utnyttjar konstruktionen av Cantormängden för att definiera ett mått  $\mu: \Sigma(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ . Låt enhetsintervallet ha massan 1, d.v.s.  $\mu(E_0) = 1$ , och de två komponenterna i  $E_1$  ha massan  $1/2$ . Fortsätt att dela upp massan jämt så att de fyra komponenterna i  $E_2$  har massan  $1/4$ . Eftersom varje komponent i  $E_k$  har exakt två delmängder som är komponenter i  $E_{k+1}$  så kan vi välja att de  $2^k$  komponenterna i  $E_k$  har massan  $2^{-k}$ . För varje  $E_k$  är då summan av komponenternas massor 1.

Låt  $\mathcal{E}$  vara samlingen av alla komponenter i alla  $E_k$  och alla delmängder av  $\mathbb{R} \setminus F$ . Genom att sätta  $\mu(V) = 0$  för alla  $V \subset \mathbb{R} \setminus F$  så är  $\mu$  definierad för varje  $U \in \mathcal{E}$ . Vi kan också definiera  $\mu(A)$  för varje  $A \subset \mathbb{R}$  genom

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) : A \cap F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, U_i \in \mathcal{E} \right\}, \quad (2.25)$$

där  $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$  är Cantormängden. Vi går inte igenom beviset för att  $\mu$  är ett Borel mått på  $\mathbb{R}$  här eftersom det är relativt invecklat och bygger på Caratheodory's utvidgningssats. Däremot är det ganska tydligt att  $\mu(\mathbb{R}) = \mu(F) = 1$  alltså är  $\mu$  en massfördelning på  $F$ . Det går också att bilda massfördelningar för andra fraktaler  $F \subset \mathbb{R}^n$  än Cantormängden på motsvarande sätt. Falconer visar i [10, lemma 8.4] att man kan skapa en massfördelning för varje fraktal som kan konstrueras med ett IFS (se kapitel 3).

**Exempel 2.25.** Vi kan bestämma att undre gränsen för Hausdorffdimensionen för Cantormängden  $F$  (se sektion 1.2) är  $s = \log 2 / \log 3$  med hjälp av massfördelningsprincipen.

*Lösning.* Låt  $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  vara en massfördelning på  $F$  så att varje intervall  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^k$ , i  $E_k$  har massan  $\mu(I_i) = 2^{-k}$  och  $\mu(\mathbb{R} \setminus F) = 0$ , som ovan.

Låt  $U$  vara en delmängd av  $\mathbb{R}$  med  $|U| < 1$  och välj  $k$  så att  $3^{-k-1} \leq |U| < 3^{-k}$ . På samma sätt som i beviset för exempel 2.23 kan  $U$  överlappa högst ett av intervallen  $I_i$  i  $E_k$  vilket gör att

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = (3^{\log 2 / \log 3})^{-k} = (3^{-k})^{\log 2 / \log 3} \leq (3|U|)^{\log 2 / \log 3} = 2|U|^{\log 2 / \log 3},$$

vilket gör att kravet i (2.24) gäller för varje mängd  $U$  med  $|U| < 1$ . Genom att tillämpa sats 2.24 gäller då att  $\dim_H F \geq s = \log 2 / \log 3$ .  $\square$

Det finns också andra metoder som kan underlätta beräkningen av Hausdorffdimensionen, bl.a. metoder från potentialteori och Fourieranalys, se t.ex. Falconer [12, sektion 4.3] respektive Mattila [22].

## 3 Itererade funktionssystem

En av de mest grundläggande metoderna för att konstruera fraktaler utgår från en konstruktion av Hutchinson [18]. Principen är att fraktalen konstrueras med ett uppräkneligt antal iterationer av ett ändligt antal kontraktionsavbildningar. Dessa kontraktionsavbildningar kallas för ett itererat funktionssystem eller IFS (på engelska *Iterated Function System*). Fraktalen är den mängd som är invariant för dessa kontraktionsavbildningar och kallas för en attraktor. De flesta fraktaler som man stöter på kan konstrueras med hjälp av itererade funktionssystem och alla som vi har bekantat oss med i sektion 1.2 är just sådana. I det här kapitlet undersöker vi konstruktionen med itererade funktionssystem och hur man på ett smidigt sätt kan beräkna Hausdorff- och Minkowskidimensionen för en viss sorts fraktaler.

Innehållet i det här kapitlet är baserat på Barnsley [1] och Falconer [12] om inte annat framgår.

### 3.1 Itererade funktionssystem

Ett itererat funktionssystem består av kontraktionsavbildningar på  $X$ , d.v.s. avbildningar  $S: X \rightarrow X$  som satisfierar  $d(S(x), S(y)) \leq cd(x, y)$  för något  $0 < c < 1$  och alla  $x, y \in X$ .

**Definition 3.1.** Låt  $(X, d)$  vara ett fullständigt metriskt rum. En ändlig mängd kontraktionsavbildningar  $S_i: X \rightarrow X$ , där  $i = 1, \dots, N$ , utgör ett itererat funktionssystem, eller IFS, och vi betecknar det  $\{X; S_1, \dots, S_N\}$  eller  $\{X; S_i\}$ .

Vi kommer i sats 3.8 att visa att varje IFS har en unik fixpunkt, d.v.s. en entydig delmängd  $F \subset X$  som är invariant för systemet av kontraktionsavbildningar. Vi kallar denna delmängd för systemets attraktor.

Innan vi undersöker egenskaperna hos ett IFS betraktar vi Cantormängden (se figur 1.1) för att få en bild av hur ett IFS fungerar. Låt  $S_1, S_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieras av

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}. \quad (3.1)$$

Det är enkelt att se att  $S_1$  och  $S_2$  avbildar enhetsintervallet  $E_0$  på  $[0, \frac{1}{3}]$  respektive  $[\frac{2}{3}, 1]$ . Eftersom  $E_1$  är unionen av dessa intervall så gäller  $E_1 = S_1(E_0) \cup S_2(E_0)$ . Vidare ser vi att  $S_1$  avbildar  $E_1$  på  $[0, \frac{1}{9}]$  och  $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$  och  $S_2$  avbildar  $E_1$  på  $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$  och  $[\frac{8}{9}, 1]$  och  $E_2 = S_1(E_1) \cup S_2(E_1)$ . Faktum är att  $E_{k+1} = S_1(E_k) \cup S_2(E_k)$  för alla  $E_k$  i konstruktionen av Cantormängden  $F$ . Om vi betecknar  $S(E) = S_1(E) \cup S_2(E)$  då  $E \subset \mathbb{R}$  så gäller  $E_k = S^k(E_0)$  och vi kan definiera Cantormängden som  $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(E_0)$ .

Å andra sidan kan vi också se att  $S_1(F) = F \cap [1, \frac{1}{3}]$  och  $S_2(F) = F \cap [\frac{2}{3}, 1]$ , d.v.s.  $S_1$  avbildar  $F$  på den vänstra halvan av  $F$  och  $S_2$  avbildar  $F$  på den högra halvan av  $F$ . Därför gäller  $S(F) = F$  vilket gör att Cantormängden också kan definieras som attraktorn för det IFS som utgörs av avbildningarna  $S_1$  och  $S_2$ .

**Definition 3.2** (Cantormängden). Cantormängden är den unika attraktorn för det itererade funktionssystemet  $\{\mathbb{R}; S_1, S_2\}$  med  $S_1$  och  $S_2$  definierade som ovan.

Sierpinskiatriangeln (se figur 1.4) kan definieras på motsvarande sätt om vi låter  $E_0$  vara den liksidiga fyllda triangeln med enhetsintervallet som bas och toppen i  $(1/2, \sqrt{3}/2)$ .

**Definition 3.3** (Sierpinskiatriangeln). Låt  $S_1, S_2, S_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definieras av

$$S_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad S_2 = \frac{1}{2}x + \begin{bmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{2}x + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Sierpinskiatriangeln är den unika attraktorn för det itererade funktionssystemet  $\{\mathbb{R}^2; S_1, S_2, S_3\}$ .

Notera att vi inte fixerar eller ens nämner  $E_0$  i definitionen av Cantormängden och Sierpinskiatriangeln. Orsaken framkommer i sats 3.8.

För att visa att ett IFS har en unik attraktor behöver vi först undersöka kontraktionsavbildningarna som utgör det. Om  $(X, d)$  är ett metriskt rum så betecknar vi mängden av icke-tomma, kompakta delmängder med  $\mathcal{S}(X)$  och ser att Hausdorffavståndet är en metrik på  $\mathcal{S}(X)$  (se definition 1.6).

**Sats 3.4.** Låt  $S: X \rightarrow X$  vara en kontraktionsavbildning med kontraktionsfaktorn  $c$  på  $(X, d)$ , d.v.s.  $d(S(x), S(y)) \leq cd(x, y)$ , för alla  $x, y \in X$  där  $0 < c < 1$ . Då är  $S: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$  en kontraktionsavbildning med kontraktionsfaktorn  $c$  på  $(\mathcal{S}(X), d_H)$  om

$$S(E) = \{S(x) : x \in E\}$$

för alla  $E \in \mathcal{S}(X)$ .

*Bevis.* Låt  $E$  vara en icke-tom, begränsad delmängd av  $(X, d)$ . Eftersom varje kontraktionsavbildning är kontinuerlig så är också  $S(E)$  en icke-tom, begränsad delmängd av  $X$  och  $S: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$ .

Låt  $A, B \in \mathcal{S}(X)$ . Då är

$$\begin{aligned} d_H(S(A), S(B)) &= \max\left\{\sup_{a \in S(A)} \inf_{b \in S(B)} d(a, b), \sup_{b \in S(B)} \inf_{a \in S(A)} d(a, b)\right\} \\ &= \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(S(a), S(b)), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(S(a), S(b))\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} cd(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} cd(a, b)\right\} \\ &= cd_H(A, B), \end{aligned}$$

vilket avslutar beviset. □

För att vidga den föregående satsen till att gälla för system av kontraktionsavbildningar behöver vi ett lemma (även kallat hjälpsats).

**Lemma 3.5.** Låt  $A, B, C, D \in \mathcal{S}(X)$ . Då gäller

$$d_H(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{d_H(A, C), d_H(B, D)\}. \quad (3.3)$$

*Bevis.*

$$\begin{aligned} d_H(A \cup B, C \cup D) &= \max \left\{ \sup_{x \in A \cup B} \inf_{y \in C \cup D} d(x, y), \sup_{y \in C \cup D} \inf_{x \in A \cup B} d(x, y) \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in C \cup D} d(x, y), \sup_{x \in B} \inf_{y \in C \cup D} d(x, y), \right. \\ &\quad \left. \sup_{y \in C} \inf_{x \in A \cup B} d(x, y), \sup_{y \in D} \inf_{x \in A \cup B} d(x, y) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in C} d(x, y), \sup_{x \in B} \inf_{y \in D} d(x, y), \right. \\ &\quad \left. \sup_{y \in C} \inf_{x \in A} d(x, y), \sup_{y \in D} \inf_{x \in B} d(x, y) \right\} \\ &= \max \{d_H(A, C), d_H(B, D)\}. \end{aligned}$$

□

**Sats 3.6.** Låt  $\{S_i\}$  vara en ändlig samling kontraktionsavbildningar på  $(\mathcal{S}(X), d_H)$  med motsvarande kontraktionsfaktorer  $c_i$ . Låt  $S: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$  definieras av

$$S(E) = \bigcup_i S_i(E) \quad (3.4)$$

för alla  $E \in \mathcal{S}(X)$ . Då är  $S$  en kontraktionsavbildning med kontraktionsfaktorn  $c = \max_i c_i$ .

*Bevis.* Vi visar att satsen gäller för två kontraktionsavbildningar  $S_1$  och  $S_2$ . Att satsen gäller för varje ändlig samling av kontraktionsavbildningar kan sedan visas med hjälp av en enkel induktion. Låt  $A, B \in \mathcal{S}(X)$ . Då ger lemma 3.5 och sats 3.4 att

$$\begin{aligned} d_H(S(A), S(B)) &= d_H(S_1(A) \cup S_2(A), S_1(B) \cup S_2(B)) \\ &\leq \max\{d_H(S_1(A), S_1(B)), d_H(S_2(A), S_2(B))\} \\ &\leq \max\{c_1 d_H(A, B), c_2 d_H(A, B)\} \\ &\leq c d_H(A, B), \end{aligned}$$

vilket gör  $S$  till en kontraktionsavbildning med kontraktionsfaktorn  $c$ . □

För att visa att ett IFS har en unik attraktor behöver vi använda Banachs fixpunktsats och därför behöver vi veta att  $(\mathcal{S}(X), d_H)$  är ett fullständigt metriskt rum. Beviset för följande sats är något tekniskt och vi hänvisar till Barnsley [1, kap. 2].

**Sats 3.7.** Låt  $(X, d)$  vara ett fullständigt metriskt rum. Då är också  $(\mathcal{S}(X), d_H)$  ett fullständigt metriskt rum.

Ett metriskt rum är fullständigt om och endast om varje cauchyföljd i rummet konvergerar till en punkt i rummet. Punkter i  $\mathcal{S}(X)$  är icke-tomma, kompakta delmängder av  $X$  så det som behöver visas är att gränsvärdet  $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  existerar i Hausdorff-metriken och att  $E$  är en icke-tom, kompakt delmängd i  $\mathcal{S}(X)$  för varje cauchyföljd  $(E_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(X)$ .

Med dessa verktyg kan vi nu visa att varje IFS har en unik attraktor, vilket är dess viktigaste egenskap när man undersöker fraktaler.

**Sats 3.8.** Låt  $\{X; S_i\}$  vara ett IFS och  $S : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$  vara kontraktionsavbildningen  $E \mapsto \bigcup_i S_i(E)$  med kontraktionsfaktorn  $c$ . Då har  $S$  en unik fixpunkt, d.v.s. det finns en unik delmängd  $F \subset X$  som är invariant under avbildningen  $S$ . Med andra ord gäller

$$F = S(F) = \bigcup_i S_i(F). \quad (3.5)$$

Vidare gäller att denna delmängd  $F$  ges av

$$F = \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(E), \quad (3.6)$$

för varje  $E \in \mathcal{S}(X)$ .

*Bevis.* Eftersom  $(\mathcal{S}(X), d_H)$  är ett fullständigt metriskt rum och  $S$  är en kontraktionsavbildning på  $\mathcal{S}(X)$  så säger Banachs fixpunktssats (se t.ex. Kreyszig [19]) att det finns ett unikt element  $F \in \mathcal{S}(X)$  så att  $S(F) = F$  och att  $d_H(S^k(E), F) \rightarrow 0$  då  $k \rightarrow \infty$  för varje  $E \in \mathcal{S}(X)$ .  $\square$

Om man väljer  $E \in \mathcal{S}(X)$  så att  $S_i(E) \subset E$  för alla  $i$  så får man en smidig metod för att bestämma attraktorn för ett IFS. Då gäller nämligen  $F = \lim_{k \rightarrow \infty} S^k(E) = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$  vilket gör att  $F \subset S^k(E)$  för alla  $k$  vilket inte gäller i allmänhet. Eftersom

$$d_H(S^k(E), F) = d_H(S^k(E), S^k(F)) \leq c^k d_H(E, F), \quad (3.7)$$

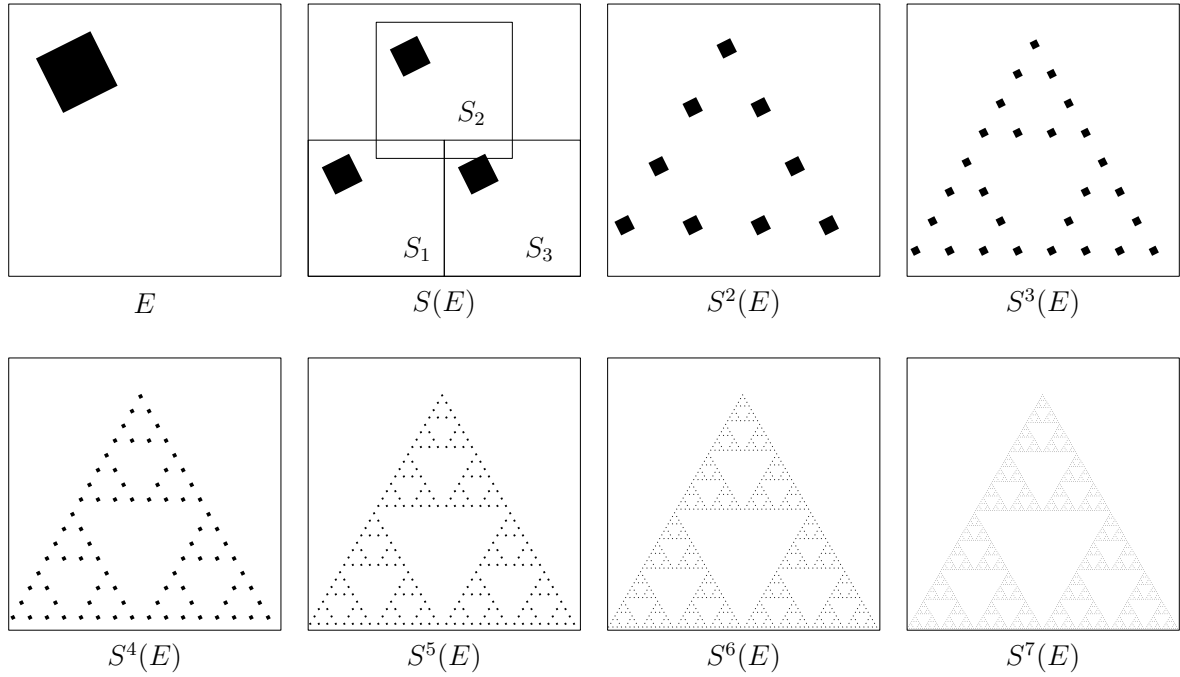
där  $c$  är kontraktionsfaktorn för kontraktionsavbildningen  $S$ , så är  $S^k(E)$  en god approximation av  $F$  för stora  $k$ . Konstruktionerna av Cantormängden och Sierpinski-triangeln tidigare i den här sektionen utgick ifrån sådana  $E_0$  att  $S(E_0) \subset E_0$ . Att vi inte behöver välja  $E$  på detta sätt är en följd av sats 3.8 och framkommer i figur 3.1. Denna metod ger ett sätt att rita approximationer av attraktorn  $F$  med hjälp av datorer. Ett annat sätt framkommer i sektion 3.3.

Attraktorn för ett IFS är oftast en fraktal, men behöver inte vara det. Om vi väljer  $S_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , så att

$$S_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad S_2(x) = \frac{1}{2}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad S_3(x) = \frac{1}{2}x + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad S_4(x) = \frac{1}{2}x + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

så är enhetskvadraten attraktorn för  $\{\mathbb{R}^2; S_1, S_2, S_3, S_4\}$ , eftersom enhetskvadraten är invariant under  $S$ . Enhetskvadraten är förvisso en självlik mängd, men är för regelbunden för att beskrivas som en fraktal. Trots att det är enkelt att hitta ett IFS vars attraktor inte är en fraktal kan man i praktiken utgå ifrån att en attraktor till något givet IFS är en fraktal. Faktum är att om vi ändrar  $S_2$  så att  $S_2(x) = \frac{1}{2}x + \begin{bmatrix} a \\ 1/2 \end{bmatrix}$  så är attraktorn för motsvarande IFS en fraktal för alla  $a \neq 0, 1$ . I figur 3.2 visas de första fem iterationerna av det IFS som är definierad som ovan men med  $a = -1/10$ .

Det är också lätt att se att det finns oändligt många IFS på  $\mathbb{R}^2$  vars attraktor är enhetskvadraten. Vi kunde exempelvis ha skapat ett IFS med 9 eller 16 kontraktionsavbildningar på ett självklart sätt. Att bestämma ett IFS vars attraktor är en given mängd är ofta, men inte alltid, möjligt. Det är dock möjligt att bestämma ett IFS vars attraktor är godtyckligt nära den givna mängden med avseende på Hausdorffmetriken, se *collage theorem* i Barnsley [1]. Detta kan tillämpas vid komprimering av bilder och annan data, se t.ex. Barnsley och Hurd [3].



Figur 3.1: Sierpinski triangeln konstruerad med ett IFS. I varje ruta ser vi enhetskvadraten och de itererade bilderna av en delmängd  $E$  under avbildningen  $S$ . I den andra rutan ser vi också hur  $S_1$ ,  $S_2$  och  $S_3$  avbildar enhetskvadraten på tre mindre kvadrater.

Det finns ett naturligt sätt att hänvisa till en viss punkt i eller en viss delmängd av en attraktor för ett IFS.

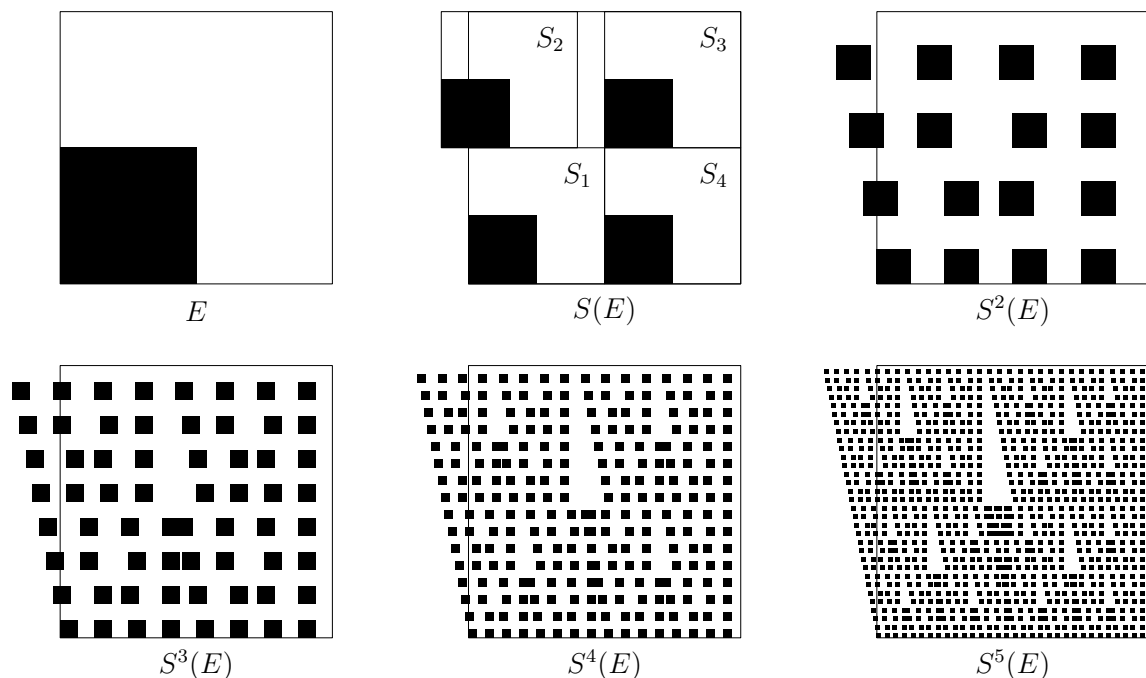
**Sats 3.9.** Låt  $F$  vara attraktorn för ett IFS  $\{X; S_1, \dots, S_N\}$  vars kontraktionsavbildningar  $S_i$  har kontraktionsfaktorn  $c_i < 1$  och låt  $\mathcal{I}$  vara mängden av uppräknliga heltalsföljder  $\mathcal{I} = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq N\}$ . Då motsvaras varje punkt  $x \in F$  av åtminstone en följd  $i_1, i_2, \dots \in \mathcal{I}$  så att  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$ .

*Bevis.* Låt  $\mathcal{I}_k$  vara mängden av heltalsföljder  $\mathcal{I}_k = \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_j \leq N\}$  med längden  $k$ . Om  $E \in \mathcal{S}(X)$  och  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k$  så skriver vi  $E_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$ . Eftersom varje  $S_i$  är en kontraktionsavbildning på  $\mathcal{S}(X)$  så är  $F \supset F_{i_1} \supset F_{i_1, i_2} \supset F_{i_1, i_2, i_3} \supset \dots$  en Cauchyföljd i  $\mathcal{S}(X)$ . Därför existerar gränsvärdet  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{i_1, \dots, i_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{S}(X)$  och vi betecknar det som  $F_{i_1, i_2, \dots}$ . Det är uppenbart att  $F_{i_1, i_2, \dots}$  motsvaras av en följd  $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$  och eftersom

$$|F_{i_1, i_2, \dots}| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} |F| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \max_i c_i \right)^k |F| = 0$$

så är  $F_{i_1, i_2, \dots}$  en punkt i  $F$ . □

Att hänvisa till en punkt  $x \in F$  med en heltalsföljd  $x = F_{i_1, i_2, \dots}$  är väldigt användbart men heltalsföljden behöver inte vara unik eftersom de olika mängderna  $S_i(F)$ ,  $i = 1, \dots, N$  inte nödvändigtvis är disjunkta. Om så däremot är fallet så finns det ett unikt  $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$  för varje  $x \in F$ . Vidare så är  $F$  totalt osammanhängande (d.v.s. alla sammanhängande komponenter av  $F$  består av endast en punkt) om de olika mängderna  $S_i(F)$  är parvis disjunkta eftersom två olika punkter  $F_{i_1, i_2, \dots} \neq F_{j_1, j_2, \dots}$  måste ha  $i_k \neq j_k$  för något  $k$  och hör därför till två disjunkta slutna mängder  $F_{i_1, \dots, i_k}$  och  $F_{j_1, \dots, j_k}$ .



Figur 3.2: Konstruktionen av en fraktal med ett IFS. I varje ruta ser vi enhetskvadraten och de itererade bilderna av en delmängd  $E$  under avbildningen  $S$  enligt (3.8).  $S_2$  är förskjutet horisontellt med  $a = -1/10$ .

Eftersom  $d_H(S^k(E), S^k(F)) \leq (\max_i c_i)^k d_H(E, F) \rightarrow 0$  då  $k \rightarrow \infty$  så gäller också  $x = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{i_1, i_2, \dots}$  och  $F_{i_1, \dots, i_k} \subset E_{i_1, \dots, i_k}$  för alla  $k$  om  $S(E) \subset E$ . Vi kommer att använda detta sätt att hänvisa till punkter och delmängder i  $F$  i kombination med en massfördelning på  $F$  i nästa sektion.

## 3.2 Dimensionen för självliknande mängder

Alla exempel på fraktaler som vi har tittat på så här långt har varit attraktorer för IFS av similariteter, d.v.s. sådana avbildningar  $S_i: X \rightarrow X$  att

$$d(S_i(x), S_i(y)) = \lambda_i d(x, y), \quad (3.9)$$

för alla  $x, y \in X$ , där  $0 < \lambda_i < 1$ . En sådan mängd är en union av mängder som är likformiga med den ursprungliga mängden och är därmed självliknande.

För självliknande mängder kan vi definiera en fraktaldimension som vi här kallar för similaritetsdimension (efter engelskans *similarity dimension*). Principen bakom similaritetsdimensionen är som följer. Anta att  $F$  är attraktorn för ett IFS vars kontraktionsavbildningar har samma skalningsfaktor. Om  $F$  skalas med heltalsfaktorn  $r$  så är  $rF$  unionen av  $r^s$  stycken kopior av  $F$  där  $s$  är similaritetsdimensionen för  $F$ . Om vi skalar en kvadrat med faktorn 2 så består den nya kvadraten av 4 kopior av den ursprungliga kvadraten och  $2^s = 4$  ger  $s = 2$ . Om vi skalar Sierpinski-triangeln (se figur 1.4) med faktorn 2 så utgörs den nya figuren av 3 stycken kopior av Sierpinski-triangeln och  $2^s = 3$  ger  $s = \log 3 / \log 2$ . Enligt samma princip har Cantormängden similaritetsdimensionen  $s = \log 2 / \log 3$ , d.v.s. samma som Hausdorffdimensionen och Minkowskidimensionen.



Definitionen av similaritetsdimensionen kräver inte att varje kontraktionsavbildning har samma skalningsfaktor.

**Definition 3.10.** Låt  $F$  vara attraktorn f r ett IFS  $\{X; S_1, \dots, S_N\}$  där varje  $S_i$   r en similaritet med skalningsfaktorn  $0 < \lambda_i < 1$ , f r  $i = 1, \dots, N$ . Då  r similaritetsdimensionen  $\dim_S F = s$  lösningen till ekvationen

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^s = 1. \quad (3.10)$$

Om  $\lambda_i = \lambda$  för varje  $i = 1, \dots, N$  så gäller att  $\sum_{i=1}^N \lambda^s = 1$  och alltså  $\dim_S F = \frac{\log N}{-\log \lambda}$ .

Vi vill visa att  $\dim_S F = \dim_H F = \dim_B F$  för alla självliknande fraktaler  $F \subset \mathbb{R}^n$  som uppfyller ett visst villkor. Förutsättningen är att mängderna  $S_i(F)$ , där  $S_i$   r similariteterna som utg r v rt IFS, inte överlappar varandra för mycket. Vi formulerar Morans villkor som följer.

**Definition 3.11.** Ett IFS  $\{\mathbb{R}^n; S_i\}$  uppfyller Morans villkor (på engelska *open set condition*) om det existerar en begränsad öppen delmängd  $V \subset \mathbb{R}^n$  så att  $S(V) = \bigcup_i S_i(V) \subset V$  och  $S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset$  då  $i \neq j$ .

Vi ser att  $V = (0, 1)$  uppfyller villkoret för det IFS vars attraktor  r Cantormängden (se definition 3.2 och figur 1.1) och att insidan av  $E_0$  i konstruktionen av Sierpinskiatriangeln (figur 1.4) uppfyller villkoret för avbildningarna i definition 3.3. Däremot kan vi inte hitta någon mängd  $V$  som skulle uppfylla Morans villkor för det IFS som finns i figur 3.2. Unionen  $\bigcup_i S_i(E)$   r disjunkt för varje öppen delmängd  $E$  av enhetskvadraten men  $S_2(E) \subset E$  gäller inte f r varje sådant  $E$  och om  $U$   r en mängd som satisfierar  $S_i(U) \subset U$  f r alla  $i$  så är inte unionen  $S_1(U) \cup S_4(U)$  disjunkt.

Vi använder oss av massfördelningsprincipen för att visa att  $\dim_S F = \dim_H F = \dim_B F$  för alla självliknande fraktaler  $F \subset \mathbb{R}^n$  som uppfyller Morans villkor. För att visa att massfördelningen som vi använder oss av uppfyller kraven i (2.24) behöver vi följande lemma.

**Lemma 3.12.** Låt  $r, a_1, a_2 > 0$  och  $\{V_i\}$  vara en samling av parvis disjunkta öppna delmängder av  $\mathbb{R}^n$  så att varje  $V_i$  innehåller ett klot med radien  $a_1 r$  och täcks av ett klot med radien  $a_2 r$ . Då överlappar klotet  $\overline{B}(x, r)$  högst  $\left(\frac{(1+2a_2)}{a_1}\right)^n$  stycken av mängderna  $\overline{V}_i$  för varje  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Bevis.* Om  $\overline{B}(x, r)$  överlappar  $\overline{V}_i$  så gäller  $\overline{V}_i \subset \overline{B}(x, r + 2a_2 r)$ . Anta att  $\overline{B}(x, r)$  överlappar  $q$  olika mängder i  $\{\overline{V}_i\}$ . Den  $n$ -dimensionella volymen av de klot med radien  $a_1 r$  som innesluts av dessa  $\overline{V}_i$   r då  $q c_n (a_1 r)^n$ , där  $c_n$   r en konstant som enbart beror på dimensionen  $n$ . Eftersom dessa klot täcks av  $\overline{B}(x, r + 2a_2 r)$  som har volymen  $c_n (r + 2a_2 r)^n$  så måste  $q c_n (a_1 r)^n \leq c_n (r + 2a_2 r)^n$ , vilket ger  $q \leq \left(\frac{(1+2a_2)}{a_1}\right)^n$ .  $\square$

Vi bevisar nu den sökta likheten. Det kan vara värt att repetera definitionen för massfördelningar och sats 2.24.

**Sats 3.13.** Om  $F$   r attraktorn f r ett IFS  $\{\mathbb{R}^n; S_1, \dots, S_N\}$  som uppfyller Morans villkor och där varje  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$   r en similaritet så är  $\dim_H F = \dim_B F = \dim_S F = s$  och  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ .

Bevis. Låt  $\lambda_i$  vara skalningsfaktorn för motsvarande  $S_i$  och låt  $s = \dim_S F$ , d.v.s. vara det tal  $s$  som satisfierar (3.10).

Vi börjar med att visa att  $\dim_H F \leq s$ . Låt  $\mathcal{I}_k$  vara mängden av heltalsföljder  $\mathcal{I}_k = \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_j \leq N\}$  och beteckna  $E_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(E)$  för varje  $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  och varje  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k$ . Genom att använda oss av (3.5) upprepade gånger får vi att  $F = \bigcup_{\mathcal{I}_k} F_{i_1, \dots, i_k}$  och eftersom  $|F_{i_1, \dots, i_k}| = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} |F| \leq (\max_i \lambda_i)^k |F|$  så kan vi alltid välja ett tillräckligt stort  $k$  så att samlingen  $\{F_{i_1, \dots, i_k}\}_{\mathcal{I}_k}$  är en  $\delta$ -övertäckning av  $F$ . Eftersom det finns  $N^k$  element i  $\mathcal{I}_k$  så ger (3.10) att

$$\sum_{\mathcal{I}_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s = \sum_{\mathcal{I}_k} (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^s |F|^s = \left( \sum_{i_1=1}^N \lambda_{i_1}^s \right) \cdots \left( \sum_{i_k=1}^N \lambda_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s,$$

vilket ger att  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s < \infty$  för alla  $\delta$ . Alltså är  $\dim_H F \leq s$ .

Att visa att  $\dim_H F \geq s$  är som vanligt svårare. Låt  $\mathcal{I}$  vara mängden av uppräknliga heltalsföljder  $\mathcal{I} = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq N\}$  och

$$I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots) : 1 \leq i_j \leq N \text{ då } j > k\}$$

vara den delmängd av  $\mathcal{I}$  där följdernas  $k$  första element är  $i_1, \dots, i_k$ . Vi kan definiera en massfördelning  $\mu'$  på  $\mathcal{I}$  genom att låta måttet för varje sådan delmängd vara  $\mu'(I_{i_1, \dots, i_k}) = (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^s$ . Eftersom (3.5) ger att  $(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^s = \sum_{i=1}^N (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^s \lambda_i^s$  för alla delmängder  $I_{i_1, \dots, i_k}$  oberoende av  $k$  så är  $\mu'(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^N \mu'(I_{i_1, \dots, i_k, i})$ . Då är  $\mu'$  ett oändligt produktmått på  $\mathcal{I}$  med  $\mu'(\mathcal{I}) = 1$ .

Eftersom varje punkt  $x \in F$  enligt sats 3.9 motsvaras av åtminstone en följd i  $\mathcal{I}$  så kan vi definiera  $\mu : \mathcal{S}(F) \rightarrow [0, \infty]$  med  $\mu(E) = \mu'(\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in E\})$ . Notera att om en punkt  $x \in E$  motsvaras av fler än en följd i  $\mathcal{I}$  så räknas varje sådan följd i  $\mu(E)$ . Vi kan utvidga  $\mu$  att vara definierat för alla delmängder  $A \subset \mathbb{R}^n$  som i (2.25) eller som i [10, lemma 8.4]. Det är möjligt att visa att  $\mu$  är en massfördelning på  $F$  med  $\mu(F) = \mu'(\mathcal{I}) = 1$ .

För att kunna använda massfördelningsprincipen måste vi visa att kravet i (2.24) håller för mängder  $U$  med  $|U| < \varepsilon$  för något  $\varepsilon > 0$ . Vi gör detta genom att visa att  $\mu(B) \leq qr^s$  för alla klot  $B$  med radien  $r < 1$  och följaktligen gäller det för mängder inneslutna av ett klot med radien  $|U| < r$ .

Vi börjar med att låta  $V$  vara en sådan öppen mängd att den uppfyller Morans villkor (se definition 3.11) för det givna IFS:et. Eftersom  $S(\bar{V}) = \bigcup_{i=1}^N S_i(\bar{V}) \subset \bar{V}$  så är  $S^k(\bar{V})$  en avtagande följd i  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  och (3.6) ger att  $\lim_{k \rightarrow \infty} S^k(\bar{V}) = F$ . Följdaktligen är  $F \subset \bar{V}$  och  $F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$  gäller för alla följder i  $\mathcal{I}_k$ . Låt  $B$  vara ett klot med radien  $r < 1$ . Vi vill visa att  $\mu(B) \leq qr^s$  där  $q$  är antalet mängder  $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$  som överlappar  $B$  och vars storlek överensstämmer med mängderna i hjälpsats 3.12.

För varje följd  $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$  finns det ett minsta  $k$  för vilket

$$\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k} \leq r. \quad (3.11)$$

Vi kapar av följden efter detta  $i_k$  och låter  $\mathcal{J}$  vara mängden av sådana kapade följder. För varje sådan följd gäller också att  $\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_{k-1}} \geq r$  och följaktligen att

$$\left( \min_i \lambda_i \right) r \leq \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}. \quad (3.12)$$

Eftersom  $V$  satisfierar Morans villkor är  $V_1, \dots, V_N$  disjunkta och med induktion får vi att  $V_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, N}$  också är disjunkta för alla  $(i_1, \dots, i_k)$ . Därför är också alla mängder  $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}\}$  parvis disjunkta. Vidare gäller att  $F \subset \bigcup_{\mathcal{J}} F_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_{\mathcal{J}} \overline{V}_{i_1, \dots, i_k}$  eftersom varje  $x_{i_1, i_2, \dots} \in F$  motsvaras av en följd i  $\mathcal{I}$  som i sin tur motsvaras av en följd i  $\mathcal{J}$ .

Om vi väljer  $a_1$  och  $a_2$  så att  $V$  innehåller ett klot med radien  $a_1$  och täcks av ett klot med radien  $a_2$  så innehåller  $V_{i_1, \dots, i_k}$  ett klot med radien  $\lambda_1 \cdots \lambda_k a_1$  och täcks av ett klot med radien  $\lambda_1 \cdots \lambda_k a_2$  för varje  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}$  eftersom varje  $S_i$  är en similaritet. Från (3.11) och (3.12) får vi att  $V_{i_1, \dots, i_k}$  innehåller ett klot med radien  $(\min_i \lambda_i) a_1 r$  och täcks av ett klot med radien  $a_2 r$ .

Om vi nu låter  $B$  vara ett klot med radien  $r$  så kan vi låta  $\mathcal{J}_B$  vara mängden av alla följder  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}$  för vilka  $\overline{V}_{i_1, \dots, i_k}$  överlappar  $B$ . Eftersom varje  $V_{i_1, \dots, i_k}$  för någon  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}$  innehåller ett klot med radien  $(\min_i \lambda_i) a_1 r$  och täcks av ett klot med radien  $a_2 r$  så ger lemma 3.12 att  $\mathcal{J}_B$  innehåller högst  $q = \left( \frac{(1+2a_2r)}{(\min_i \lambda_i) a_1 r} \right)^n$  följder.

Eftersom varje mängd  $U$  med  $|U| < r$  täcks av ett klot  $B$  med radien  $r$  så gäller

$$\mu(U) \leq \mu(B) = \mu(B \cap F) = \mu'(\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in B \cap F\}).$$

Vi vet också att

$$B \cap F \subset B \cap \left( \bigcup_{\mathcal{J}} F_{i_1, \dots, i_k} \right) \subset B \cap \left( \bigcup_{\mathcal{J}} \overline{V}_{i_1, \dots, i_k} \right) \subset \bigcup_{\mathcal{J}_B} \overline{V}_{i_1, \dots, i_k},$$

vilket med (3.11) ger

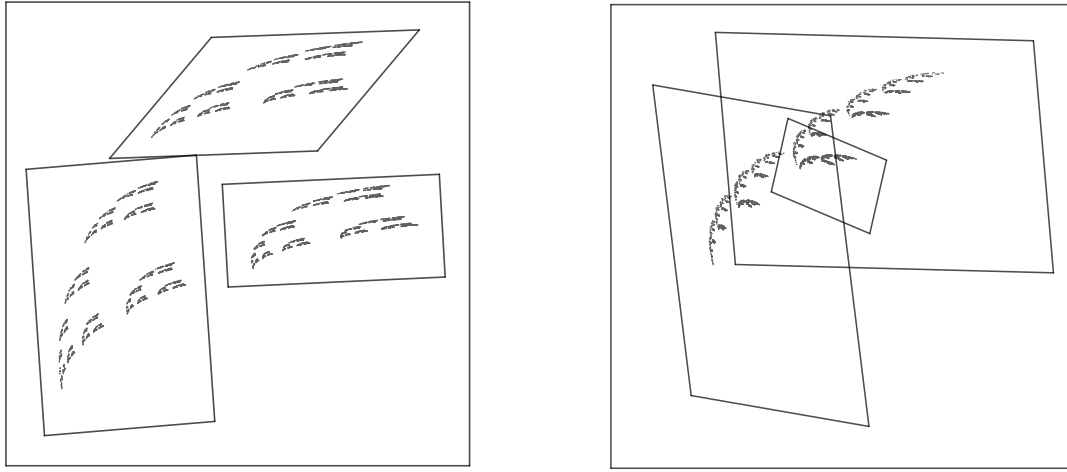
$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq \mu' \left( \left\{ (i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in \bigcup_{\mathcal{J}_B} \overline{V}_{i_1, \dots, i_k} \right\} \right) \\ &= \mu' \left( \bigcup_{\mathcal{J}_B} I_{i_1, \dots, i_k} \right) \leq \sum_{\mathcal{J}_B} \mu'(I_{i_1, \dots, i_k}) \\ &= \sum_{\mathcal{J}_B} (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^s \leq \sum_{\mathcal{J}_B} r^s \leq q r^s. \end{aligned}$$

Vi kan alltså använda oss av massfördelningsprincipen (se sats 2.24) vilket ger att  $\mathcal{H}^s(F) \geq q^{-1} > 0$  och  $\dim_H F \geq s$ .

För att visa att  $\dim_B F = s$  så räcker det att visa att  $\dim_{UB} F \leq s$  eftersom  $\dim_{UB} F \geq \dim_{LB} F \geq \dim_H F$  alltid gäller (se sats 2.19). Låt  $\mathcal{J}$  vara densamma som tidigare för något givet  $r > 0$ . Eftersom (3.5) ger att  $(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^s = \sum_{i=1}^N (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \lambda_i)^s$  för alla  $I_{i_1, \dots, i_k} \subset \mathcal{I}$  så kan man med induktion visa att  $\sum_{\mathcal{J}} (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^s = 1$ . Med (3.12) får vi att

$$1 = \sum_{\mathcal{J}} (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^s \geq \sum_{\mathcal{J}} \left( \min_i \lambda_i \right)^s r^s = \left( \min_i \lambda_i \right)^s r^s \sum_{\mathcal{J}} 1,$$

vilket ger att antalet följder i  $\mathcal{J}$  är högst  $(\min_i \lambda_i)^{-s} r^{-s}$  stycken. Om  $V$  fortsättningsvis är en mängd som uppfyller Morans villkor så ger (3.11) att  $|\overline{V}_{i_1, \dots, i_k}| = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} |\overline{V}| \leq r |\overline{V}|$  för varje  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}$ . Eftersom  $F \subset \bigcup_{\mathcal{J}} \overline{V}_{i_1, \dots, i_k}$  så är  $\{\overline{V}_{i_1, \dots, i_k}\}_{\mathcal{J}}$  en  $r|\overline{V}|$ -övertäckning av  $F$  med högst  $(\min_i \lambda_i)^{-s} r^{-s}$  mängder. Den övre Minkowskidimensionen



Figur 3.3: Figurerna visar fraktaler som bildats av IFS bestående av tre affina kontraktionsavbildningar. Parallelogrammen visar hur kvadraten avbildas under de olika transformationerna. Fraktalerna är konstruerade med hjälp av ett kaosspel, se sektion 3.3.

för  $F$  blir då

$$\begin{aligned} \dim_{UB} F &= \limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{\log((\min_i \lambda_i)^{-s} r^{-s})}{-\log(r|\bar{V}|)} = \limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{-s(\log(\min_i \lambda_i) + \log r)}{-\log r - \log |\bar{V}|} \\ &= s \limsup_{r \rightarrow 0+} \left( \frac{-\log r}{-\log r - \log |\bar{V}|} + \frac{-\log(\min_i \lambda_i)}{-\log r - \log |\bar{V}|} \right) = s, \end{aligned}$$

eftersom  $-\log |\bar{V}|$  och  $-\log(\min_i \lambda_i)$  är konstanter med avseende på  $r$ .  $\square$

Vi har visat att  $\dim_H F = \dim_B F = \dim_S F$  för alla självliknande fraktaler  $F \subset \mathbb{R}^n$  som uppfyller Morans villkor. Det går också att visa att  $\dim_H F = \dim_B F \leq \dim_S F$  för attraktorer till IFS av similariteter även om de inte uppfyller Morans villkor, vilket Falconer visar i [11]. Dessa resultat är båda mycket användbara eftersom många av de mera kända fraktalerna är självliknande och de flesta av dem också uppfyller Morans villkor.

Man kunde vänta sig att det också skulle vara relativt enkelt att bestämma dimensionerna för självaffina mängder, d.v.s. attraktorer till IFS vars kontraktionsavbildningar är affina avbildningar (se figur 3.3). Om ett IFS bestod av  $N$  stycken affina avbildningar på  $\mathbb{R}^n$  så kunde en sådan formel exempelvis bygga på de  $nN$  stycken skalningsfaktorerna. Tyvärr visar det sig att Hausdorffdimensionen för attraktorn för ett sådant IFS inte ändrar kontinuerligt när avbildningarna ändras kontinuerligt. Ett exempel på detta finns i Falconer [12, sektion 9.4] och bygger på projektionen av fraktaler.

Vi kan däremot visa att  $\dim_H F \leq \dim_{UB} F \leq \dim_S F$  för alla  $F$  som är attraktorer för ett IFS om vi generaliserar similaritetsdimensionen till att också omfatta IFS som inte består av similariteter genom att lösa  $\sum_i c_i^s = 1$  med kontraktionsfaktorerna  $c_i$  istället för skalningsfaktorerna  $\lambda_i$ .

**Sats 3.14.** Låt  $F$  vara attraktorn för ett IFS  $\{X; S_1, \dots, S_N\}$  med kontraktionsfaktorerna  $c_i$ . Då är  $\dim_H F \leq \dim_{UB} F \leq s$ , där  $s$  är lösningen till  $\sum_i c_i^s = 1$ .

*Bevis.* Låt  $\mathcal{J}$  vara konstruerad som i beviset för sats 3.13 för något  $0 < r < 1$  och låt  $V \supset F$  vara en mängd som uppfyller  $S_i(V) \subset V$  för alla  $i$ . Då gäller att  $\{V_{i_1, \dots, i_k}\}_{\mathcal{J}}$  är en  $r|V|$ -övertäckning av  $F$  eftersom  $F \subset \bigcup_{\mathcal{J}} V_{i_1, \dots, i_k}$  och  $|V_{i_1, \dots, i_k}| \leq c_{i_1} \cdots c_{i_k} |V| \leq r|V|$  enligt (3.11). Notera att vi inte har likhet i  $|V_{i_1, \dots, i_k}| \leq c_{i_1} \cdots c_{i_k} |V|$  som vi hade i sats 3.13. Att  $\dim_{UB} F \leq s$  följer från detta i likhet med beviset för sats 3.13 och  $\dim_H F \leq \dim_{UB} F$  följer från sats 2.19.  $\square$

Vi kan också hitta en undre gräns för dimensionen om kontraktionerna är begränsade nerifrån och parvis disjunkta.

**Sats 3.15.** *Låt  $F$  vara attraktorn för ett IFS  $\{X; S_1, \dots, S_N\}$  där  $b_i d(x, y) \leq |S_i(x) - S_i(y)|$  för alla  $x, y \in X$  och där  $0 < b_i < 1$  för varje  $i$ . Om mängderna  $S_i(F)$  också är parvis disjunkta för  $i = 1, \dots, N$  så är  $s \leq \dim_H F$  där  $\sum_{i=1}^N b_i^s = 1$ .*

*Bevis.* Vi använder massfördelningsprincipen till att bevisa satsen. Eftersom det finns ett  $b_i$  för varje kontraktion  $S_i$  så kan vi bilda en massfördelning genom att betrakta mängderna  $F_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(F)$  och låta  $\mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s$ . Att  $\mu$  är en massfördelning på  $F$  följer av att mängderna  $S_i(F)$  är parvis disjunkta och att

$$\sum_{i=1}^N \mu(F_{i_1, \dots, i_k, i}) = \sum_{i=1}^N (b_{i_1} \cdots b_{i_k} b_i)^s = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s \sum_{i=1}^N b_i^s = \mu(F_{i_1, \dots, i_k})$$

för varje  $k$ . Vi får då att  $\mu(F) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^N S_i(F)\right) = \sum_{i=1}^N b_i^s = 1$ .

Vi vill ännu visa att kravet för massfördelningsprincipen i 2.24 uppfylls. Låt  $d > 0$  vara det minsta avståndet mellan de olika mängderna  $S_1(F), \dots, S_N(F)$ . Om  $x \in F$  så finns det en unik oändlig talföljd  $i_1, i_2, \dots$  så att  $x \in F_{i_1, \dots, i_k}$  för varje  $k$ . Anta att  $0 < r < d$  och låt  $k$  vara det minsta heltal för vilket

$$b_{i_1} \cdots b_{i_k} d \leq r < b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d. \quad (3.13)$$

Låt  $i_1, \dots, i_k$  och  $i'_1, \dots, i'_k$  vara två talföljder som skiljer sig från varandra på åtminstone ett ställe  $i_j \neq i'_j$ . Om  $j$  är det minsta heltal för vilket  $i_j \neq i'_j$  så är mängderna  $F_{i_j, \dots, i_k} \subset F_{i_j}$  och  $F_{i'_j, \dots, i'_k} \subset F_{i'_j}$  disjunkta och avståndet mellan dem är åtminstone  $d$ . Det följer att avståndet mellan mängderna  $F_{i_1, \dots, i_k}$  och  $F_{i'_1, \dots, i'_k}$  är åtminstone  $b_{i_1} \cdots b_{i_{j-1}} d \geq b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d > r$ . Mängden  $F \cap B(x, r)$  är då en delmängd av  $F_{i_1, \dots, i_k}$  och vi får att

$$\mu(F \cap B(x, r)) \leq \mu(F_{i_1, \dots, i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k} d)^s d^{-s} \leq r^s d^{-s}.$$

Om  $|U| \leq d$  och  $U \cap F \neq \emptyset$  så är  $U \subset B(x, |U|)$  för något  $x \in F$ . Då är  $\mu(U) \leq d^{-s} |U|^s$ , vilket enligt massfördelningsprincipen ger att  $\dim_H F \geq s$ .  $\square$

Med andra ord kan vi alltid bestämma övre och undre gränser för Hausdorff- och Minkowskidimensionen för fraktaler vars IFS satisfierar

$$b_i d(x, y) \leq |S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i d(x, y)$$

för alla  $x, y \in X$  där  $0 < b_i < c_i < 1$  för varje  $i$ , vilket vi demonstrerar i exempel 5.4.

### 3.3 Kaos och kaospel

Vi har tidigare hänvisat till en metod för att rita fraktaler kallad kaospel (från engelskans *chaos game*). Metoden bygger på ergodisk teori men går att förstå också utan vara insatt i området. En detaljerad beskrivning med bevis finns i Elton [9] men en relativt djupgående förklaring finns också i Barnsley [1, kap. 9].

Eftersom  $S_i(F) \subset F$  för varje  $S_i$  i ett IFS så är också  $S_i(x) \in F$  om  $x \in F$ . Låt  $x_k = S_{i_k} \circ \dots \circ S_{i_2} \circ S_{i_1}(x)$  där  $x \in F$  och varje  $S_{i_j}$  är slumpmässigt vald bland funktionssystemets kontraktioner. Det är tydligt att  $x_k \in F$  för varje  $k$ . Ergodisk teori säger att om vi låter  $k \rightarrow \infty$  så är följderna  $(x_k)_k$ , med sannolikheten 1, tät i  $F$ , vilket vi också kan uttrycka som att sannolikheten för att följderna inte är tät i  $F$  är noll. Med andra ord är mängden  $\{x_k\}_k$  för något stort  $k$  en väldigt bra approximation för  $F$ . Vidare kan vi välja ett tillräckligt stort  $k$  för att  $d(S_{i_k} \circ \dots \circ S_{i_1}(x_0), F)$  är godtyckligt litet för i stort sett vilket  $x_0 \in X$  som helst, vilket gör att vi inte heller behöver välja en punkt i  $F$  som startvärde för kaospelet. Kaospelet går ut på att välja en punkt som är någorlunda nära fraktalen som startpunkt och rita t.ex. mängden  $\{x_k\}_{k=100}^{1000}$ . Två exempel finns i figur 3.3 där de tre olika avbildningarna har valts med sannolikheten  $1/3$ . Det är också vanligt att låta de olika avbildningar väljas med olika sannolikhet. Det vanligaste exemplet är en s.k. *Barnsley fern* som skapas med fyra avbildningar och liknar en ormbunke, se Barnsley [1].

Begreppet kaos dyker ofta upp i samband med fraktaler. I kapitel 6 ges en exakt definition av kaos då vi undersöker komplex dynamik. I korthet kan man säga att kaos uppkommer när banan  $\{f^k(x)\}_{k=1}^\infty$  för någon avbildning  $f : E \rightarrow E$  varierar oförutsägbart på små variationer av variabeln  $x$ . Då vi undersöker hur banan för punkter  $x \in E$  beter sig så kallar vi  $\{E, f\}$  för ett dynamiskt system.

Om vi har ett IFS  $\{X; S_i\}$  med attraktorn  $F$  där mängderna  $S_i(F)$  är disjunkta så kan vi använda det för att skapa ett dynamiskt system på  $F$ . Eftersom  $\bigcap_i S_i(F) = \emptyset$  så är varje avbildning  $S_i : F \rightarrow F$  injektiv, och det existerar en invers  $S_i^{-1} : S_i(F) \rightarrow F$ . Utgående från de olika inversa funktionerna på  $S_i(F)$  kan vi bilda en invers funktion på  $F = \bigcup_i S_i(F)$ . Betrakta punkten  $x = F_{i_1, i_2, \dots} \in F$ . Vi definierar funktionen  $S^{-1} : F \rightarrow F$  som  $S^{-1}(F_{i_1, i_2, \dots}) = S_{i_1}^{-1}(F_{i_1, i_2, \dots}) = F_{i_2, i_3, \dots}$ . Funktionen  $S^{-1}$  utgör ett dynamiskt system på  $F$ . Om vi betraktar två punkter  $x_1 = F_{i_1, i_2, \dots}$  och  $x_2 = F_{i'_1, i'_2, \dots}$  i  $F$  så kan man föreställa sig att  $d(x_1, x_2)$  kan vara godtyckligt litet och ändå leda till att banorna för  $x_1$  och  $x_2$  är helt olika för tillräckligt stora  $k$ . Det dynamiska systemet  $\{F, S^{-1}\}$  är faktiskt kaotiskt, vilket Barnsley visar i [1, kap. 4].

## 4 Kurvor med fraktala egenskaper

Många klassiska fraktaler är kurvor. Kochkurvan (se figur 1.2) är ett typiskt exempel. Det finns en smidig metod för att konstruera sådana fraktaler utgående från en generator, vilket vi kommer att undersöka i det här kapitlet. Utöver dem kommer vi också att titta på en särskild typ av kurvor, nämligen funktionsgrafer. Funktionsgrafer används ofta för att modellera data, oftast med hjälp av linjer, polynom, exponentialfunktioner eller andra elementära funktioner. Sådana kurvor har en "klassisk geometri" och kan lokalt liknas vid en linje. Många datamängder har däremot en mera fraktal struktur, t.ex. en mätning av elektrisk spänning över tid, p.g.a. naturligt brus. Ett annat exempel på grafer med fraktala egenskaper är aktiekurser. I sådana fall kan det vara värt att modellera mätningen med någon form av fraktal funktion.

Kapitlet bygger i första hand på Barnsley [1] och i viss mån Falconer [12], förutom där andra källor anges.

### 4.1 Kurvor utgående från generatorer

Det vanligaste exemplet på en självliknande kurva är Kochkurvan, och därför är den lämplig för att introducera självliknande kurvor. Det är värt att observera att vi inte kräver att en kurva ska vara glatt. Kochkurvan består av fyra disjunkta kurvor som alla är en kopia av hela kurvan. Därför är det ganska uppenbart att det finns ett IFS bestående av fyra similariteter vars attraktor är Kochkurvan. Vi hittar de fyra similariteterna genom att se på kurvan som vi i sektion 1.2 kallade för  $E_1$  (se figur 1.2). Kurvan  $E_1$  består av fyra sträckor och utgör *generatorn* för Kochkurvan. Generatorn fungerar så att vi låter de fyra similariteterna avbilda generatorns ändpunkter (d.v.s. sträckan  $E_0$ 's ändpunkter) på varje sträckas ändpunkter. Genom upprepade iteration är det tydligt att attraktorn  $F$  för detta IFS blir Kochkurvan.

**Definition 4.1** (Kochkurvan.). Låt  $\{\mathbb{R}^2; S_1, S_2, S_3, S_4\}$  vara ett IFS där  $S_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definieras enligt

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \frac{1}{3}x & S_2(x) &= \begin{bmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ S_3(x) &= \begin{bmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/9 \end{bmatrix} & S_4(x) &= \frac{1}{3}x + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

för  $i = 1, 2, 3, 4$ . Kochkurvan är den unika attraktorn för detta IFS.

Eftersom varje kontraktion i Kochkurvans IFS är en similaritet med skalningsfaktor  $\lambda = \frac{1}{3}$  så kan vi använda sats 3.13 för att bestämma att  $\dim_H F = \dim_B F = \dim_S F = \log 4 / \log 3$ .

Generatoren för en självliknande kurva behöver inte ha sträckor med samma längd. Det finns egentligen inga andra krav än att den ska vara sammanhängande och ha tydliga ändpunkter som ska avbildas på varje sträckas ändpunkter. Det är också möjligt att spegla avbildningarna både genom sträckan och genom sträckans mittpunktsnormal utan att kurvan blir osammanhängande. Det kan däremot hända att de olika avbildningarna överlappar varandra så att man inte kan använda similaritetsdimensionen för att bestämma Hausdorff- och Minkowskidimensionen för kurvan.

I figur 4.1 ser vi olika kurvor som har genererats utgående från generatorer. Pilarna i generatorerna visar hur de olika avbildningarna vänder, vilket i några av kurvorna spelar en stor roll. Vi använder här ordet kurva väldigt fritt eftersom varken generatoren eller fraktalen i figur 4.1d är en kontinuerlig kurva från ena ändpunkten till den andra utan snarare trädliknande figurer. De övriga figurerna är däremot kurvor. Vi ser att Sierpinskiatriangeln (figur 4.1e) också kan beskrivas som en kurva och i figur 4.1f har vi Hilbertkurvan (se t.ex. Sagan [25]) som är ett exempel på en *rumsuppfyllande kurva*. Hilbertkurvan har dimensionen 2 och det är tveksamt om man kan kalla den en fraktal då den är identisk med en fylld kvadrat. Om man däremot ser på Hilbertkurvans konstruktion så har den flera fraktala egenskaper. I figur 4.1c har vi en kurva som ofta kallas drackkurva. Den är också rumsuppfyllande och har dimensionen två. Den är däremot i allra högsta grad en fraktal och dess rand har Hausdorffdimensionen 1,524 [6].

Om vi istället för att hålla oss till similariteter också tillåter affina avbildningar så öppnar sig flera möjligheter. Kurvorna kommer då inte nödvändigtvis att vara självliknande utan självaffina. Då vi tillåter affina avbildningar så behöver vi specificera vilka avbildningar vi använder noggrannare eftersom det finns oändligt många avbildningar per sträcka i generatoren. Ett alldeles särskilt fall är sådana affina avbildningar som avbildar vertikala linjer på vertikala linjer, vilket vi kommer att titta närmare på i nästa sektion.

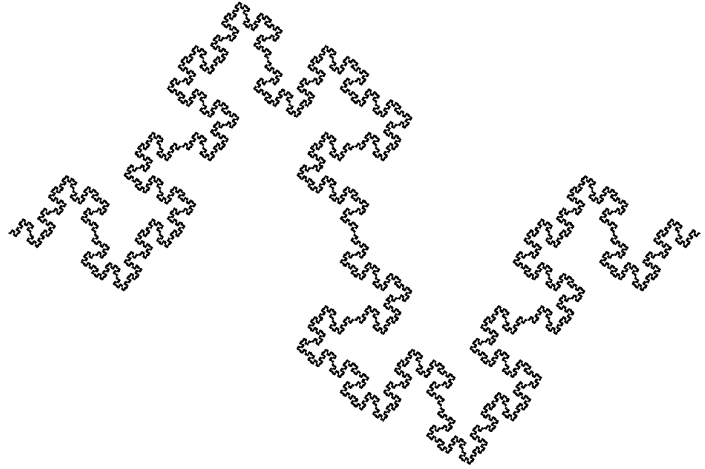
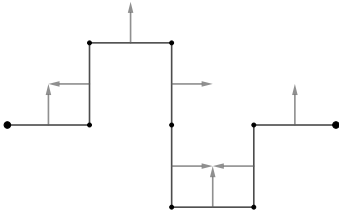
## 4.2 Fraktal interpolation

I den här sektionen konstruerar vi en viss sorts funktioner vars grafer är självaffina kurvor. Vi undersöker graferna i ett  $(x, y)$ -koordinatsystem, vilket gör att beteckningarna  $x$  och  $y$  i den här delen inte beskriver samma variabel. Funktionsgrafen för en funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definierar vi som graf  $f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\}$ . En självaffin funktion är en funktion vars graf består av delar som är affina bilder av hela grafen. Linjära funktioner är förstås självaffina, men det finns också icke-triviala funktioner som är självaffina utan att vara fraktaler, t.ex. funktionen  $f : x \mapsto x^2$  för  $x > 0$ . Vi är intresserade av funktioner vars grafer är fraktaler, och vi konstruerar sådana genom fraktal interpolation av givna datamängder varefter vi bevisar att de konstruerade fraktalerna är grafer till kontinuerliga funktioner genom att tillämpa Banachs fixpunktssats på mängden av kontinuerliga funktioner på ett visst intervall.

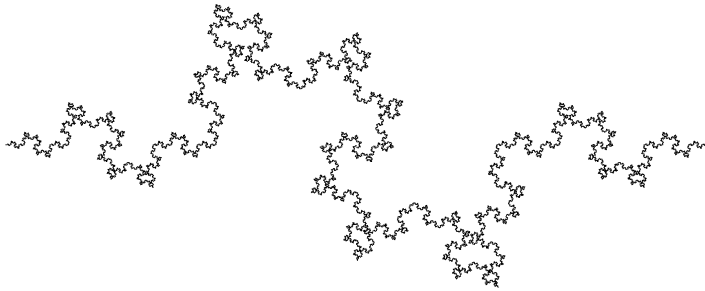
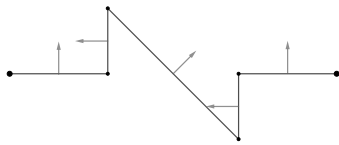
Konstruktionen utgår från en generator. Eftersom kurvan vi vill skapa ska vara en funktionsgraf så måste varje sträcka i generatoren gå från vänster till höger. Vi definierar en mängd data enligt följande.

**Definition 4.2.** En mängd data är en mängd punkter  $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, 1, 2, \dots, N\}$

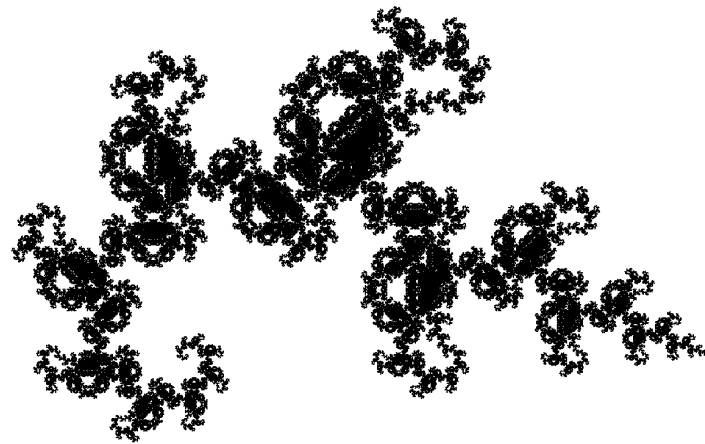
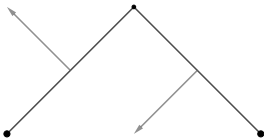




(a) Minkowskikurvan.  $\dim_S F = 3/2$

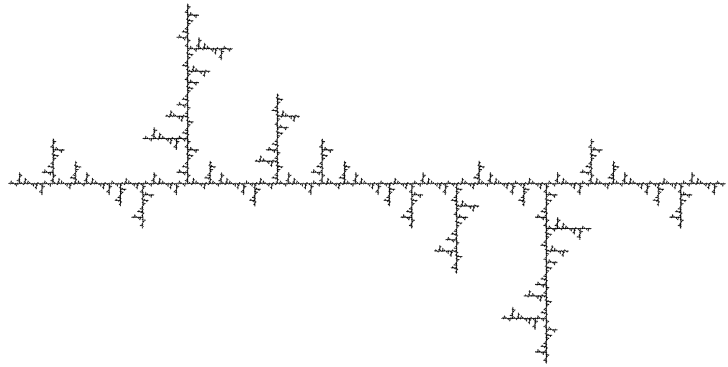
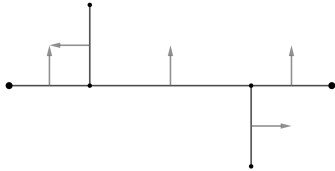


(b) Fraktal som liknar en kustlinje.  $\dim_S F \approx 1,61$

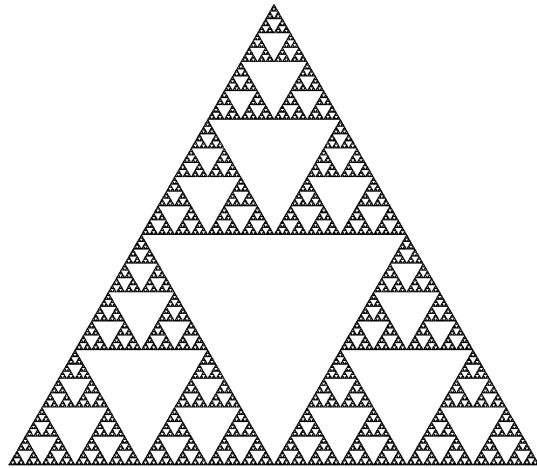
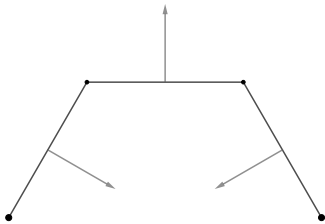


(c) Drakkurva.  $\dim_S F = 2$

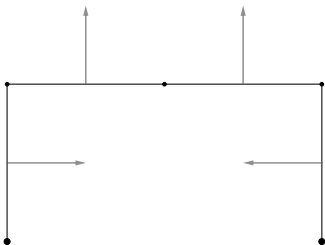
Figur 4.1: Olika generatorer och de fraktaler som de åstadkommer. Pilarna visar hur avbildningen vänder. Figurerna är ritade med en algoritm i Python.



(d) Trädliknande fraktal.  $\dim_S F \approx 1,36$



(e) Sierpinski triangeln.  $\dim_S F = \log(3)/\log 2$



(f) Hilbertkurvan.  $\dim_S F = 2$

för vilka  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ .

Målet är att konstruera grafen till en kontinuerlig och självaffin funktion som interpolerar någon given mängd data, d.v.s. funktionens graf går genom alla punkterna i datamängden. Genom att förena punkterna i datan med sträckor får vi en generator som går från  $(x_0, y_0)$  till  $(x_N, y_N)$ , men vi måste hitta rätt kontraktioner för de olika delarna i generatoren. Vi behöver hitta affina kontraktioner  $S_1, \dots, S_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  så att deras attraktor är grafen för en kontinuerlig och självaffin funktion  $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$  så att  $f(x_i) = y_i$  för alla  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Det första kravet på de affina avbildningarna  $S_i$  är att de ska avbilda sträckan mellan  $(x_0, y_0)$  och  $(x_N, y_N)$  på sträckan mellan  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  och  $(x_i, y_i)$  för varje  $i = 1, \dots, N$ , på samma sätt som similariteterna i förra sektionen. Utöver det kräver vi också att avbildningarna ska avbilda vertikala linjer på vertikala linjer så att den nya kurvan är en funktionsgraf eller att  $S_i([x_0, x_N] \times \mathbb{R}) = [x_{i-1}, x_i] \times \mathbb{R}$  ska gälla för varje  $i = 1, 2, \dots, N$ . Ett tredje krav är att avbildningarna ska vara kontraktioner. Skjuvningsavbildningarna (på engelska: *shear transformation*)

$$S_i(x, y) = \begin{bmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

för vilka  $S_i(x_0, y_0) = (x_{i-1}, y_{i-1})$  och  $S_i(x_N, y_N) = (x_i, y_i)$ , satisfierar de två första kraven. Med andra ord måste parametrarna  $a_i, c_i, e_i, f_i$  och  $d_i$  satisfiera ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_i x_0 + e_i = x_{i-1} \\ a_i x_N + e_i = x_i \\ c_i x_0 + d_i y_0 + f_i = y_{i-1} \\ c_i x_N + d_i y_N + f_i = y_i \end{cases}, \quad (4.2)$$

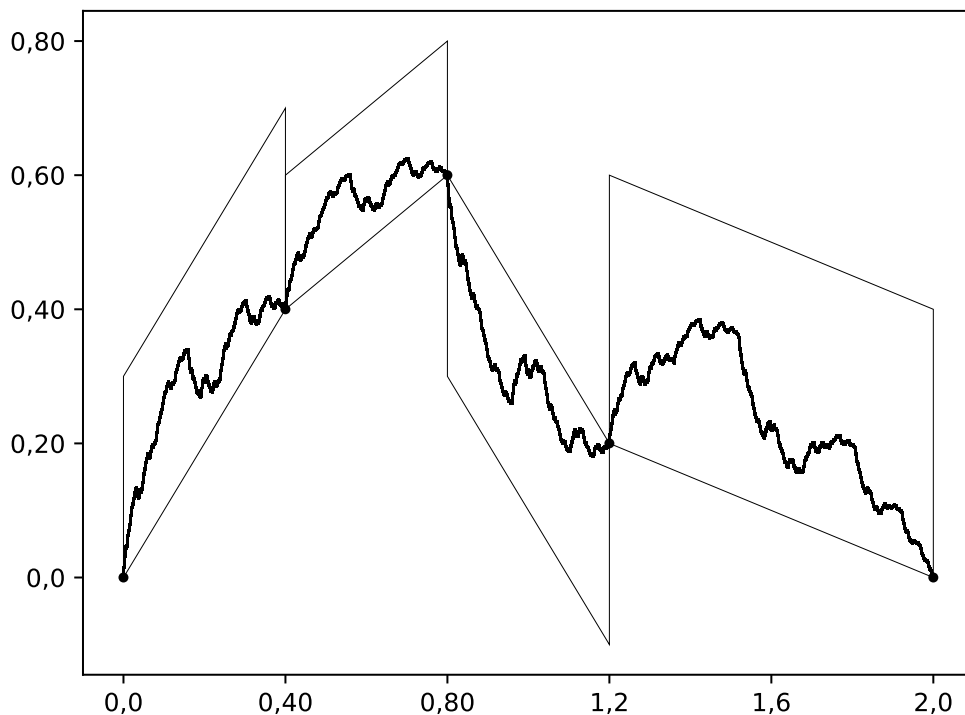
vilket har lösningarna

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0} & c_i &= \frac{y_i - y_{i-1} - d_i(y_N - y_0)}{x_N - x_0} \\ e_i &= \frac{x_N x_{i-1} - x_0 x_i}{x_N - x_0} & f_i &= \frac{x_N y_{i-1} - x_0 y_i - d_i(x_N y_0 - x_0 y_N)}{x_N - x_0}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

där parametern  $d_i$  är oberoende. Parametern  $d_i$  anger hur avbildningen skalas i  $y$ -led, så vi behöver på något sätt välja  $d_i$  så att avbildningen är en kontraktion. Avbildningen är en kontraktion i  $x$ -led för alla  $d_i$  och med  $-1 < d_i < 1$  så är avbildningen en kontraktion också i  $y$ -led. Det visar sig att det finns en metrik som är ekvivalent med den euklidiska normen för vilken alla  $S_i$  definierade som ovan är kontraktioner så länge  $|d_i| < 1$ . Med andra ord är  $\{\mathbb{R}^2; S_i\}$  ett IFS med en unik attraktor.[1]

Figur 4.2 visar attraktorn för ett IFS för datan  $\{(0, 0), (0, 4; 0, 4), (0, 8; 0, 6), (1, 2; 0, 2), (2, 0)\}$  där skjuvningsarna  $S_i$  har de vertikala skalningsfaktorerna  $d_1 = 0,3, d_2 = 0,2, d_3 = -0,3$  och  $d_4 = 0,4$ . Om vi hade haft  $d_i = 0$  för varje  $i = 1, 2, 3, 4$  så hade attraktorn varit lika med generatoren. Figuren visar att kurvan uppenbarligen är kontinuerlig. Vi ska visa att den och alla andra fraktaler bildade på samma sätt är kontinuerliga funktioner.

**Sats 4.3.** Låt  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$  vara en mängd data och  $\{\mathbb{R}^2; S_1, \dots, S_N\}$  vara det IFS vars attraktor interpolerar datan enligt ovanstående metod. Då är IFS:ets attraktor  $F$  grafen till en kontinuerlig funktion  $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$  för vilken  $f(x_i) = y_i$  för varje  $i = 1, 2, \dots, N$ .



Figur 4.2: Grafen  $F$  för en självaffin funktion som interpolerar datan  $\{(0,0), (0,4; 0,4), (0,8; 0,6), (1,2; 0,2), (2,0)\}$  med de vertikala skalningsfaktorerna  $d_1 = 0,3, d_2 = 0,2, d_3 = -0,3$  och  $d_4 = 0,4$ . Parallelogrammen representerar de affina avbildningarna.  $\dim_B F \approx 1,133$ .

*Bevis.* Låt  $\mathcal{C} \subset C([x_0, x_N])$  vara mängden av kontinuerliga funktioner  $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$  sådana att  $f(x_0) = y_0$  och  $f(x_N) = y_N$ . Vi definierar en metrik  $d_{\mathcal{C}}$  på  $\mathcal{C}$  enligt

$$d_{\mathcal{C}}(f, g) = \max_{x \in [x_0, x_N]} |f(x) - g(x)|.$$

$(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  är då ett fullständigt metriskt rum, vilket kan kontrolleras i någon kurs eller bok om funktionalanalys, t.ex. Kreyszig [19].

Målet är att visa att någon kontraktion  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  motsvarar vårt IFS och att kontraktionen har en unik fixpunkt  $f \in \mathcal{C}$  så att  $(Tf)(x) = f(x)$  för alla  $x \in [x_0, x_N]$  och att den funktionens graf också är attraktorn  $F$  för vårt IFS.

Vi vill att avbildningen  $T$  ska motsvara avbildningarna  $S_i$ . Ekvation (4.1) ger att

$$S_i(x, y) = (a_i x + e_i, c_i x + d_i y + f_i),$$

där  $a_i, c_i, e_i$  och  $f_i$  är definierade enligt (4.3). För att avbildningen  $T$  ska motsvara avbildningarna  $S_i$  så vill vi att

$$(Tf)(a_i x + e_i) = c_i x + d_i f(x) + f_i,$$

för alla  $i = 1, 2, \dots, N$  och alla  $x \in [x_0, x_N]$ . Vi kan då skriva om  $T$  som

$$(Tf)(x) = \frac{c_i(x - e_i)}{a_i} + d_i f\left(\frac{x - e_i}{a_i}\right) + f_i$$

för  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  och varje  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Vi behöver visa att  $Tf \in \mathcal{C}$  för alla  $f \in \mathcal{C}$ . För det första vill vi visa att  $(Tf)(x_0) = y_0$  och  $(Tf)(x_N) = y_N$  vilket (4.2) ger enligt

$$\begin{aligned}(Tf)(x_0) &= \frac{c_1(x_0 - e_1)}{a_1} + d_1 f\left(\frac{x_0 - e_1}{a_1}\right) + f_1 \\ &= c_1 x_0 + d_1 f(x_0) + f_1 = c_1 x_0 + d_1 y_0 + f_1 = y_0\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}(Tf)(x_N) &= \frac{c_N(x_N - e_N)}{a_N} + d_N f\left(\frac{x_N - e_N}{a_N}\right) + f_N \\ &= c_N x_N + d_N f(x_N) + f_N = c_N x_N + d_N y_N + f_N = y_N.\end{aligned}$$

Sedan behöver vi bara visa att  $Tf$  är kontinuerlig i  $(x_0, x_N)$ . Eftersom  $f \in \mathcal{C}$  och alla parametrarna  $a_i, c_i, e_i$  och  $f_i$  är begränsade reella tal med  $a_i \neq 0$  så är  $Tf$  kontinuerlig i  $[x_0, x_N] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ . Vidare är  $(Tf)(x_i)$  definierat på två olika sätt för varje  $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ . De två definitionerna ger samma värde för  $(Tf)(x_i)$  eftersom

$$\begin{aligned}(Tf)(x_i) &= \frac{c_{i+1}(x_i - e_{i+1})}{a_{i+1}} + d_{i+1} f\left(\frac{x_i - e_{i+1}}{a_{i+1}}\right) + f_{i+1} \\ &= c_{i+1} x_0 + d_{i+1} f(x_0) + f_{i+1} = c_{i+1} x_0 + d_{i+1} y_0 + f_{i+1} = y_i\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}(Tf)(x_i) &= \frac{c_i(x_i - e_i)}{a_i} + d_i f\left(\frac{x_i - e_i}{a_i}\right) + f_i \\ &= c_i x_N + d_i f(x_N) + f_i = c_i x_N + d_i y_N + f_i = y_i,\end{aligned}$$

där det sista steget följer av (4.2). Med andra ord är  $Tf$  kontinuerlig i hela  $[x_0, x_N]$  alltså är  $Tf \in \mathcal{C}$  då  $f \in \mathcal{C}$ .

Nästa steg är att visa att  $T$  är en kontraktion på  $\mathcal{C}$  så att vi kan använda Banachs fixpunktssats. För två funktioner  $f, g \in \mathcal{C}$  och  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  så är

$$|(Tf)(x) - (Tg)(x)| = |d_i| \left| f\left(\frac{x - e_i}{a_i}\right) - g\left(\frac{x - e_i}{a_i}\right) \right| \leq |d_i| d_{\mathcal{C}}(f, g)$$

vilket ger att  $d_{\mathcal{C}}(Tf, Tg) \leq (\max_i |d_i|) d_{\mathcal{C}}(f, g)$  där  $|d_i| < 1$  för alla  $i = 1, 2, \dots, N$ . Banachs fixpunktssats ger då att det existerar en unik fixpunkt  $f \in \mathcal{C}$  för vilken  $(Tf)(x) = f(x)$  för alla  $x \in [x_0, x_N]$ .

Vi definierade  $T$  så att  $\text{graf } Tg = \bigcup_i S_i(\text{graf } g)$  för alla  $g \in \mathcal{C}$ . För fixpunkten  $f$  gäller då att  $\text{graf } f = \text{graf } Tf = \bigcup_i S_i(\text{graf } f)$  vilket gör att  $\text{graf } f$  är attraktorn för vårt IFS. Med andra ord är attraktorn  $F = \text{graf } f$  grafen till en kontinuerlig funktion.  $\square$

Vi har alltså visat att vi kan bilda kontinuerliga funktioner med en fraktal graf som interpolerar vilken data som helst. Den är däremot inte deriverbar någonstans eftersom den har en struktur på varje nivå och därmed inte har en väldefinierad tangent i någon punkt. En sådan funktion kallas ofta för en fraktal interpolationsfunktion. Dessa kan vara användbara för att modellera t.ex. elektrisk spänning över tiden eller andra mätdata med mycket brus. Det kunde vara intressant att försöka hitta IFS med

så få avbildningar som möjligt som interpolerar någon specifik data. Vi är också intresserade av funktionsgrafernas dimension.

Eftersom avbildningarna för de fraktala interpolationsfunktioner som vi har behandlat inte är similariteter så kan vi inte använda similaritetsdimensionen för att bestämma Hausdorff- eller Minkowskidimensionen för graferna. Det visar sig också att det är svårt att bestämma Hausdorffdimensionen för dem. Det finns däremot en enkel metod för att bestämma deras Minkowskidimension och Deng [7] har utarbetat en relativt ny metod för att bestämma en undre gräns för Hausdorffdimensionen av en särskild typ av fraktala interpolationsfunktioner med  $x_i$  jämt fördelade över intervallet  $[x_0, x_N]$ .

**Sats 4.4.** Låt  $F$  vara attraktorn för ett IFS  $\{\mathbb{R}^2; S_1, \dots, S_N\}$  som interpolerar någon mängd data enligt ovannämnda metod. Om  $\sum_{i=1}^N |d_i| > 1$  så är  $s = \dim_B F$  den reella lösningen till ekvationen

$$\sum_{i=1}^N |d_i| a_i^{s-1} = 1, \quad (4.4)$$

där  $a_i$  bestäms enligt (4.3) och  $0 < |d_i| < 1$ . Om  $\sum_{i=1}^N |d_i| \leq 1$  så är  $\dim_B F = 1$ .

*Informellt bevis.* Vi skisserar här ett argument för varför satsen är sann utgående från två antaganden. För det första antar vi att  $F$  har en Minkowskidimension  $s$  som vi kan bestämma med hjälp av (2.14), d.v.s.  $N_\delta(F) \approx c\delta^{-s}$  då  $\delta \rightarrow 0$  där  $N_\delta(F)$  är antalet  $\delta$ -nätkuber som överlappar  $F$  och  $c$  är någon konstant. Det andra antagandet är att  $|d_i| > a_i$  för alla  $i = 1, 2, \dots, N$ , vilket är ett starkare krav än  $\sum_{i=1}^N |d_i| > 1$  eftersom

$$\sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N \frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0} = 1.$$

Barnsley, Elton, Hardin och Massopust ger ett bevis utan dessa extra antaganden i [2].

För varje  $i = 1, \dots, N$  låter vi  $N_\delta(F_i)$  ange antalet  $\delta$ -nätkuber som överlappar mängden  $F_i = S_i(F)$ , med  $\delta > 0$  mycket litet. Eftersom de olika mängderna  $F_i$  bara överlappar varandra i enstaka punkter  $(x_i, y_i)$  så kan vi anta att

$$N_\delta(F) \approx N_\delta(F_1) + N_\delta(F_2) + \dots + N_\delta(F_N). \quad (4.5)$$

Nästa steg är att hitta ett förhållande mellan  $N_\delta(F)$  och  $N_\delta(F_i)$ . Vi betecknar samlingen  $\delta$ -nätkuber som överlappar  $F$  med  $U_\delta(F)$ . Eftersom  $a_i$  och  $d_i$  kan ses som kontraktionskoefficienterna i  $x$ - respektive  $y$ -led, så kommer samlingen  $\{S_i(E) : E \in U_\delta(F)\}$  att bestå av  $N_\delta(F)$  stycken parallelogram med bredden  $a_i\delta$  och höjden  $d_i\delta$  vilka överlappar  $S_i(F)$ . Vi kan ersätta dessa parallelogram med  $a_i\delta$ -nätkuber som behöver vara ungefär  $|d_i|/a_i$ -faldigt fler än de  $N_\delta(F)$  parallelogrammen för att täcka  $F_i = S_i(F)$ . Med andra ord är

$$N_{a_i\delta}(F_i) \approx \frac{|d_i|}{a_i} N_\delta(F).$$

För tillräckligt små  $\delta$  kan vi då konstatera att

$$N_\delta(F_i) \approx \frac{|d_i|}{a_i} N_{\delta/a_i}(F)$$

och tillsammans med (4.5) får vi då att

$$N_\delta(F) \approx \frac{|d_1|}{a_1} N_{\delta/a_1}(F) + \frac{|d_2|}{a_2} N_{\delta/a_2}(F) + \cdots + \frac{|d_N|}{a_N} N_{\delta/a_N}(F).$$

Vi utnyttjar antagandet att  $N_\delta(F) \approx c\delta^{-s}$  och erhåller

$$c\delta^{-s} \approx \frac{c|d_1|}{a_1} \left(\frac{\delta}{a_1}\right)^{-s} + \frac{c|d_2|}{a_2} \left(\frac{\delta}{a_2}\right)^{-s} + \cdots + \frac{c|d_N|}{a_N} \left(\frac{\delta}{a_N}\right)^{-s}$$

vilket ger oss

$$1 \approx |d_1|a_1^{s-1} + |d_2|a_2^{s-1} + \cdots + |d_N|a_N^{s-1}.$$

För alla approximationer i den här skissen gäller att eventuella fel blir mindre då  $\delta \rightarrow 0$  vilket bevisar satsen första del.

Om vi istället antar att  $|d_i| = a_i$  för alla  $i$ , vilket skulle ge  $\sum_{i=1}^N |d_i| = 1$ , så skulle

$$N_\delta(F) \approx N_{\delta/a_1}(F) + N_{\delta/a_2}(F) + \cdots + N_{\delta/a_N}(F)$$

vilket i sin tur skulle ge att  $1 = \sum_{i=1}^N a_i^s$  som har den triviala lösningen  $s = 1$ . Eftersom en funktionsraf inte kan ha en lägre Minkowskidimension än 1 så är det rimligt att  $\dim_B F = 1$  om  $\sum_{i=1}^N |d_i| \leq 1$ .  $\square$

Notera att den här metoden för att skapa fraktala interpolationsfunktioner  $f$  inte ger ett funktionsuttryck med vilket vi enkelt kan bestämma funktionsvärdet för något variabelvärde. För att bestämma funktionsvärdet  $f(x)$  för något  $x \in [x_0, x_N]$  kan man bestämma den följd  $(i_1, \dots, i_k)$  som motsvarar intervallet  $S'_{i_1} \circ \cdots \circ S'_{i_k}([x_0, x_N]) \supset x$ , där  $S'_i(x) = a_i x + e_i$  är  $x$ -komponenten av  $S_i$ , och sedan bestämma  $y$ -koordinaten av  $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(0, 0)$  som är en approximation av  $f(x)$ . Ju högre  $k$  desto bättre blir approximationen.

Det finns också andra funktioner som inte är deriverbara någonstans. Ett exempel på en sådan funktion är Weierstrassfunktionen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k x)$$

där  $1 < s < 2$  och  $\lambda > 1$ . Falconer [12] visar att grafen till den här Weierstrassfunktionen har Minkowskidimensionen  $s$  och Deng [7] konstaterar att en variant av Weierstrassfunktionen är en fraktal interpolationsfunktion.

## 5 Exempel från talteori

Talteori är ett område inom matematiken där fraktaler förekommer utanför en geometrisk kontext. Därför kan fraktaler i en talteoretisk kontext vara överraskande och intressanta att bekanta sig med. Ett exempel är att binomialkoefficienterna i Pascals triangel påminner om Sierpinski-triangeln om man färgar alla udda koefficienter med en färg och alla jämna med en annan. I sektion 1.2 konstaterade vi att Cantormängden består av de tal i  $[0, 1]$  som inte innehåller en etta i sin decimalutveckling i basen 3. I detta kapitel kommer vi att undersöka fraktaler som i likhet med Cantormängden kan beskrivas utgående från en decimalutveckling och fraktaler som konstrueras utgående från kedjebråk. Det är ett rimligt antagande att alla fraktaler i en talteoretisk kontext är delmängder av  $\mathbb{R}$  och fraktalernas dimension ger en metod för att jämföra olika mängders storlek.

Innehållet i det här kapitlet är baserat på Falconer [12] förutom där annat är angivet.

### 5.1 Fördelningen av decimaler i tal

I den här sektionen kommer vi att beteckna tal i enhetsintervallet i basen  $b \in \mathbb{N}$  med

$$x = 0_b a_1 a_2 a_3 \dots = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \frac{a_3}{b^3} + \dots, \quad (5.1)$$

där alla  $a_i = 0, 1, \dots, b-1$ . Eftersom en del tal motsvaras av två olika följder  $(a_1, a_2, \dots)$ , t.ex.  $1/2 = 0_2 1000 \dots = 0_2 0111 \dots$ , så gör vi valet att alltid välja den form som inte slutar med en oändlig följd nollor. Vi kommer också, i brist på bättre terminologi, att använda begreppet decimalutveckling för detta sätt att beteckna tal, även om det inte alltid är basen 10 som används.

Ett av de mest intressanta resultaten i talteori är att nästan alla reella tal är normala (i varje bas), se. t.ex. Nilsen [24]. Ett tal är *normalt i basen  $b$*  om de asymptotiska frekvenserna för varje följd med längden  $n$  är jämnt fördelade i talets decimalutveckling, för varje  $n \in \mathbb{N}$ . Det betyder att de  $b$  olika siffrorna förekommer lika ofta i talets decimalutveckling, att de  $b^2$  olika följderna med längden 2 förekommer lika ofta och så vidare. Ett tal är *normalt* om det är normalt i varje bas  $b \in \mathbb{N}$ .

Att nästan varje reellt tal är normalt betyder att mängden av alla icke-normala tal har Lebesguemåttet 0. Trots detta har man inte kunnat bevisa att något beräkningsbart tal är normalt. Det är däremot förmodat att bl.a.  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\ln(2)$  och Nepers tal  $e$  är normala. I stort sett alla tal vi vanligen använder oss av är med andra ord inte normala. Som vi såg i exemplet med Cantormängden kan Hausdorffdimensionen användas för att beskriva en mängds storlek då andra mått, i det här fallet Lebesguemåttet eller kardinalitetsmåttet, ger storleken noll eller oändligt.



Låt  $p_0, p_1, \dots, p_{b-1}$  vara en följd för vilken  $0 \leq p_i \leq 1$  och  $\sum_{i=0}^{b-1} p_i = 1$  och  $F(p_0, \dots, p_{b-1})$  vara den mängd tal i  $[0, 1)$  vars utveckling i basen  $b$  asymptotiskt innehåller siffrorna  $0, \dots, b-1$  i proportionerna  $p_0, \dots, p_{b-1}$ . Vi kan uttrycka detta mer exakt genom att beteckna antalet förekomster av siffran  $j$  bland de första  $k$  decimalplaceringarna av  $x$  med  $n_j(x, k)$ . Då gäller att

$$F(p_0, \dots, p_{b-1}) = \left\{ x \in [0, 1) : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_j(x, k)}{k} = p_j \text{ för alla } j = 0, \dots, b-1 \right\}. \quad (5.2)$$

Observera att om  $p_i \neq 1/b$  för något  $i \in \{0, \dots, b-1\}$  så är inget av talen i  $F(p_0, \dots, p_{b-1})$  normalt. Vi avser att undersöka Hausdorffdimensionen för sådana mängder och för det behöver vi de stora talens lag i stark form, vars bevis hittas i t.ex. Billingsley [5].

**Sats 5.1** (De stora talens lag i stark form.). Låt  $X_1, X_2, \dots$  vara en följd av inbördes oberoende och identiskt fördelade stokastiska variabler i något sannolikhetsrum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  och  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Om väntevärdet  $E(X_i) = m < \infty$  för varje  $i = 1, 2, \dots$  så är  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n = m) = 1$  d.v.s.  $S_n/n$  konvergerar mot  $m$  med sannolikheten 1 då  $n \rightarrow \infty$ .

*Anmärkning 5.2.* Med  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n = m)$  så avser vi  $P(\{x \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n = m\})$ . Liknande förkortningar används också i följande sats.

**Sats 5.3.** Låt  $F = F(p_0, \dots, p_{b-1})$  vara som ovan. Då gäller

$$\dim_H F = -\frac{1}{\log b} \sum_{i=0}^{b-1} p_i \log p_i \quad (5.3)$$

om vi definierar  $p_j \log(p_j) := 0$  då  $p_j = 0$ .

*Bevis.* Först antar vi att  $0 < p_i < 1$  för alla  $i = 1, \dots, b-1$ . Vi bestämmer Hausdorffdimensionen för  $F$  probabilistiskt genom att tänka oss att siffrorna i decimalutvecklingen för tal  $x = 0.i_1 i_2 \dots \in [0, 1)$  väljs slumpmässigt så att den  $k$ :te siffran  $i_k$  är  $j$  med sannolikheten  $p_j$  för varje  $k$ . Mera formellt kan vi säga att  $[0, 1)$  är ett utfallsrum med någon  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  och ett sannolikhetsmått  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  så att  $P(i_k = j) = p_j$  för varje  $k = 1, 2, \dots$ . Vi behöver visa att det existerar ett sådant sannolikhetsmått. Vi betecknar mängden tal som börjar med siffrorna  $0.i_1 \dots i_k$  med  $I_{i_1, \dots, i_k}$  och sannolikheten att ett tal  $x$  som valts slumpmässigt enligt ovanstående metod finns i intervallet  $I_{i_1, \dots, i_k}$  kan fås med uttrycket

$$P(I_{i_1, \dots, i_k}) = p_{i_1} \cdots p_{i_k}. \quad (5.4)$$

Vi kan då välja  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$  eftersom alla Borel delmängder av  $[0, 1)$  kan bildas av de olika intervallen  $I_{i_1, \dots, i_k}$ .  $P$  är ett sannolikhetsmått eftersom

$$\sum_{i=0}^{b-1} P(I_{i_1, \dots, i_k, i}) = p_{i_1} \cdots p_{i_k} \sum_{i=0}^{b-1} p_i = P(I_{i_1, \dots, i_k})$$

för alla  $k = 1, 2, \dots$  och  $P([0, 1)) = \sum_{i=0}^{b-1} p_i = 1$ .

För att kunna utvidga detta sannolikhetsmått till ett mått på  $[0, 1)$  enligt (2.25) och använda det som en massfördelning behöver vi visa att  $P(F) = P([0, 1)) = 1$ , eller  $P([0, 1) \setminus F) = 0$ . Vi fixerar  $j \in \{0, \dots, b-1\}$ . Sannolikheten för händelserna "den  $k$ :te siffran i decimalutvecklingen för  $x$  är  $j$ " är  $p_j$  för alla  $k = 1, 2, \dots$  oberoende av hur de

övriga siffrorna har valts. Därmed kan vi bilda en följd av inbördes oberoende och identiskt fördelade stokastiska variabler  $X_k$  på sannolikhetsrummet  $([0, 1], \mathcal{B}(\Omega), P)$  enligt

$$X_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } i_k = j \\ 0, & \text{om } i_k \neq j \end{cases}$$

med väntevärdet  $E(X_k) = p_j$ . Eftersom  $n_j(x, k) = X_1 + \dots + X_k$  så ger sats 5.1 att  $P(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_j(x, k)}{n} = p_j) = 1$ . I och med att detta gäller för varje  $j = 0, \dots, b-1$  så är  $P(F) = 1$  och  $P([0, 1] \setminus F) = 0$ .  $P$  fungerar därmed som en massfördelning på  $F$ .

Vi använder beteckningen  $I_k(y)$  för det intervall  $I_{i_1, \dots, i_k}$  som innehåller talet  $y$ . Vi noterar att  $|I_k(y)| = b^{-k}$ . Vi får då att

$$P(I_k(y)) = p_0^{n_0(y, k)} \dots p_{b-1}^{n_{b-1}(y, k)}, \quad (5.5)$$

vilket ger

$$\log P(I_k(y)) = n_0(y, k) \log p_0 + \dots + n_{b-1}(y, k) \log p_{b-1}.$$

Om  $y \in F$  så gäller att  $n_j(y, k) \rightarrow p_j$  då  $k \rightarrow \infty$  för alla  $j$  och

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k} \log \frac{P(I_k(y))}{|I_k(y)|^s} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k} \log P(I_k(y)) - \frac{1}{k} \log |I_k(y)|^s \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{n_0(y, k)}{k} \log p_0 + \dots + \frac{n_{b-1}(y, k)}{k} \log p_{b-1} - \frac{1}{k} \log b^{-ks} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{b-1} p_i \log p_i + s \log b. \end{aligned}$$

Ovanstående uttryck är noll om

$$s = t = -\frac{1}{\log b} \sum_{i=0}^{b-1} p_i \log p_i$$

så att

$$\log \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(I_k(y))}{|I_k(y)|^s} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( k \cdot \frac{1}{k} \log \frac{P(I_k(y))}{|I_k(y)|^s} \right) = \begin{cases} -\infty, & \text{då } s < t \\ \infty, & \text{då } s > t \end{cases},$$

vilket ger att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(I_k(y))}{|I_k(y)|^s} = \begin{cases} 0, & \text{då } s < t \\ \infty, & \text{då } s > t \end{cases}, \quad (5.6)$$

för alla  $y \in F$ .

Vi vill visa att  $\mathcal{H}^s(F) \geq 1$  då  $s < t$  och  $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$  då  $s > t$  så att  $\dim_H F = t$ . Vi börjar med fallet  $s < t$  och definierar en delmängd

$$F_\delta = \{y \in F : P(I_k(y)) < c |I_k(y)|^s \text{ för alla } |I_{k+1}(y)| \leq \delta\} \quad (5.7)$$

för alla  $\delta > 0$  och

$$c = b^{-s} \left( 1 + \frac{\max_i p_i}{\min_i p_i} \right)^{-1}. \quad (5.8)$$

Från (5.6) ser vi att  $F_\delta \rightarrow F$  då  $\delta \rightarrow 0$  eftersom  $|I_{k+1}(y)| = b^{-k-1} \rightarrow 0$  då  $k \rightarrow \infty$ . Låt  $\{U_i\}$  vara en  $\delta$ -övertäckning av  $F \supset F_\delta$ . För varje  $U_i$  som innehåller något  $y_i \in$

$F_\delta$  väljer vi ett så litet heltal  $k_{U_i}$  som möjligt så att  $b^{-k_{U_i}} < |U_i| \leq b^{-k_{U_i}+1}$ . Då täcks  $U_i$  av  $I_{k_{U_i}}(y_i)$  och ett intilliggande intervall  $I_{k_{U_i}}^*(y_i)$  med samma längd. Eftersom det intilliggande intervallet har exakt en annan siffra på en annan plats så får vi från (5.4) att  $P(I_{k_{U_i}}^*(y_i)) \leq \frac{\max_i p_i}{\min_i p_i} P(I_{k_{U_i}}(y_i))$ . (5.7) och (5.8) ger att

$$\begin{aligned} P(U_i) &\leq \left(1 + \frac{\max_i p_i}{\min_i p_i}\right) P(I_{k_{U_i}}(y_i)) \\ &< c \left(1 + \frac{\max_i p_i}{\min_i p_i}\right) |I_{k_{U_i}}(y_i)|^s \\ &= c \left(1 + \frac{\max_i p_i}{\min_i p_i}\right) (b^{-k_{U_i}+1})^s \\ &= b^{-k_{U_i}s} \\ &< |U_i|^s, \end{aligned}$$

vilket ger

$$P(F_\delta) \leq \sum_i \{P(U_i) : U_i \text{ överlappar } F_\delta\} \leq \sum_i |U_i|^s.$$

Eftersom detta gäller för varje  $\delta$ -övertäckning  $\{U_i\}$  så måste  $P(F_\delta) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F_\delta) \leq \mathcal{H}^s(F_\delta)$  och i och med att  $F_\delta \rightarrow F$  då  $\delta \rightarrow 0$  så måste  $1 = P(F) \leq \mathcal{H}^s(F)$  vilket vi ville bevisa.

Sedan låter vi  $s > t$  och konstaterar att för varje  $y \in F$  så kan vi enligt (5.6) välja ett tillräckligt stort  $k$  så att  $P(I_k(y)) > |I_k(y)|^s$ . För varje givet  $\delta > 0$  kan vi därför välja en uppräknelig och parvis disjunkt  $\delta$ -övertäckning  $\{I_{k_i}(y_i)\}$  av  $F$  så att  $P(I_{k_i}(y_i)) > |I_{k_i}(y_i)|^s$  för varje  $i = 0, 1, \dots$ . Vi får att

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_i |I_{k_i}(y_i)|^s \leq \sum_i P(I_{k_i}(y_i)) \leq P([0, 1)) = 1,$$

för varje  $\delta$  och således är  $\mathcal{H}^s(F) \leq 1 < \infty$ .

Att ovanstående resonemang också håller om  $p_j = 0$  för något  $j \in \{0, \dots, b-1\}$  följer av att  $n_j(x, k) = 0$  för alla  $k$  och att det därför inte finns någon faktor  $p_j^{n_j(y, k)}$  i (5.5). Att satsen också gäller om något  $p_j = 1$  är trivialt.  $\square$

Man kan fråga sig hur en sådan mängd kan se ut. Ett exempel är mängden  $F(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$  som har Hausdorffdimensionen

$$\dim_H F = -\frac{1}{\log 3} \left( \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Alla tal i  $F(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$  saknar alltså ettor i sin bas-3 utveckling och är därför en delmängd av Cantormängden. Den har också samma Hausdorffdimension som Cantormängden, men skiljer sig från Cantormängden eftersom bl.a. talet  $0_3111\dots$  finns i Cantormängden men inte i  $F(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ .

## 5.2 Kedjebråk

Varje tal  $x$  som inte är ett heltal kan uttryckas som  $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$ , där  $a_0$  är ett heltal och  $x_1 > 1$ . Om inte  $x_1$  är ett heltal kan vi skriva  $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ , med samma krav på  $a_1$  och

$x_2$  som på  $a_0$  respektive  $x_1$ . Genom att fortsätta på det här sättet får vi att

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}},$$

vilket kallas för ett kedjebråk. Alla reella tal kan uttryckas som kedjebråk och alla rationella tal har en ändlig följd  $(a_1, \dots, a_k)$ . Alla irrationella tal har en oändlig följd  $(a_1, a_2, \dots)$  och en fördel med en representation i form av kedjebråk gentemot en representation i decimalform är att denna följd är samma oberoende av talbas. För ett irrationellt tal  $x$  kommer också

$$x \approx a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k}}}}$$

att utgöra en approximation för  $x$  som snabbt konvergerar mot  $x$  då  $k \rightarrow \infty$ .

Några exempel på kedjebråk är

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad \sqrt{3} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}},$$

där  $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  är det gyllene snittet. För att få en mera kompakt notation kan vi välja att bara skriva ut följden  $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ . Gyllene snittet skulle då betecknas  $\varphi = [1; 1, 1, 1, \dots]$ . Två andra viktiga irrationella konstanter är nepers tal  $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$  som har en regelbunden följd av konstanter och  $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \dots]$  vars följd av konstanter inte tycks vara regelbunden. Talföljderna som utgörs av konstanterna i flera kedjebråk kan hittas i OEIS (*the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*) [27].

Vi kan utgående från kedjebråk definiera talmängder som visar sig vara fraktaler, t.ex. mängden av alla tal vars kedjebråk har en oändlig följd termer  $(a_0, a_1, \dots)$  vilka är 1 eller 4. Mängden är uppenbart en delmängd av  $[1, 5]$ . Vi visar att mängden är attraktorn för ett IFS och gör en uppskattning av dess Hausdorffdimension.

**Exempel 5.4.** Låt  $F = \{x = [a_0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R} : a_i \in \{1, 4\} \text{ för alla } i = 0, 1, \dots\}$  och  $D = [1, 5]$ . Vi definierar avbildningarna  $S_1, S_2: D \rightarrow D$  som  $S_1(x) = 1 + 1/x$  och  $S_2(x) = 4 + 1/x$ . Då är  $\{D; S_1, S_2\}$  ett IFS med attraktorn  $F$  och  $0,305 \leq \dim_H F \leq 0,608$ .

*Lösning.* Vi börjar med att visa att  $F$  är attraktorn för  $\{D; S_1, S_2\}$ . Det är uppenbart att  $F \subset D$  eftersom  $S_1(D) \subset D$  och  $S_2(D) \subset D$ . Vidare är  $F$  ett element i  $(\mathcal{S}(D), d_H)$  eftersom  $F$  är sluten, icke-tom och begränsad. Eftersom  $x \in F$  endast om  $x = S_1(y)$  eller  $x = S_2(y)$  för något  $y \in F$  så gäller också  $F = S_1(F) \cup S_2(F)$ , vilket gör  $F$  till den unika attraktorn för detta IFS.

Vidare så använder vi oss av satserna 3.14 och 3.15 för att approximera dimensionen för  $F$ . För att tillämpa metoden behöver vi hitta värden  $0 < b_i < c_i < 1$  så att

$$b_i|x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y| \quad (5.9)$$

för alla  $x, y \in D$ , då  $i = 1, 2$ . Det visar sig vara omöjligt att hitta sådana  $c_1$  och  $c_2$  då  $D = [1, 5]$ . Vi kan däremot konstatera att  $F$  också är attraktor för  $\{D'; S_1, S_2\}$  med  $D' = [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}), 2(1 + \sqrt{2})]$  eftersom  $S_1(D') = [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}), 2\sqrt{2} - 1] \subset D'$  och  $S_2(D') = [\frac{1}{2}(7 + \sqrt{2}), 2(1 + \sqrt{2})] \subset D'$ .

Differentialkalkylens medelvärdessats (som kan hittas i alla grundläggande böcker om differentialkalkyl) ger ett enkelt sätt att hitta  $b_i$  och  $c_i$  eftersom det för  $x, y \in D'$  ( $x \neq y$ ) måste finnas ett tal  $\xi_i \in D'$  så att  $\frac{S_i(x) - S_i(y)}{x - y} = S'_i(\xi_i)$ . Genom att undersöka det minsta och största värdet som  $S'_i(\xi_i)$  kan ta får vi

$$\inf_{x \in D'} |S'_i(x)| \leq \frac{|S_i(x) - S_i(y)|}{|x - y|} \leq \sup_{x \in D'} |S'_i(x)|. \quad (5.10)$$

Eftersom  $S'_1(x) = S'_2(x) = -x^{-2}$  så får vi att  $b_1 = b_2 = \inf_{x \in D'} |S'_1(x)| = \frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{2})$  och  $c_1 = c_2 = \sup_{x \in D'} |S'_1(x)| = 4(3 - 2\sqrt{2})$ . Satserna 3.14 och 3.15 ger då att  $\dim_H F$  begränsas nerifrån av lösningen till  $2(\frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{2}))^t = 1$  och uppifrån av lösningen till  $2(4(3 - 2\sqrt{2}))^s = 1$ . Det här ger oss approximationen  $0,22 \leq \dim_H F \leq 1,84$ , vilket dock är en mycket dålig uppskattningsberäkning uppåt. Vi vet nämligen att  $\dim_H F \leq 1$  eftersom  $F \subset \mathbb{R}$ .

För att få en bättre approximation kan vi istället se på de fyra avbildningarna  $S_i \circ S_j$  där  $i, j = 1, 2$  som också utgör ett IFS på  $D'$  och har attraktorn  $F$ . Med  $s_1 = 1$  och  $s_2 = 4$  så får vi att

$$S_i \circ S_j(x) = s_i + \frac{1}{s_j + x} = s_i + \frac{x}{s_j x + 1}$$

och derivatan  $(S_i \circ S_j)'(x) = (s_j x + 1)^{-2}$  då  $i, j = 1, 2$ . Vi kan använda differentialkalkylens medelvärdessats också på  $S_i \circ S_j(x)$  för att kunna bestämma  $b_{i,j}$  och  $c_{i,j}$  för de fyra olika avbildningarna.

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= b_{2,1} = \inf_{x \in D'} |(x + 1)^{-2}| = 17 - 12\sqrt{2} \\ b_{1,2} &= b_{2,2} = \inf_{x \in D'} |(4x + 1)^{-2}| = \frac{1}{2209}(209 - 144\sqrt{2}) \\ c_{1,1} &= c_{2,1} = \sup_{x \in D'} |(x + 1)^{-2}| = \frac{2}{49}(17 - 12\sqrt{2}) \\ c_{1,2} &= c_{2,2} = \inf_{x \in D'} |(4x + 1)^{-2}| = 17 - 12\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Enligt samma metod som tidigare får vi att lösningarna till  $\sum_{i,j=1,2} (b_{i,j})^t = 1$  och  $\sum_{i,j=1,2} (c_{i,j})^s = 1$  utgör undre respektive övre gränser för  $\dim_H F$ . En numerisk lösning ger att  $0,305 \leq \dim_H F \leq 0,608$  vilket är en betydligt bättre approximation än den förra.

Genom att ersätta avbildningarna  $S_i \circ S_j$  med någon ändlig sammansättning  $S_i \circ S_j \circ S_k \circ \dots$  ger den här metoden en möjlighet att approximera dimensionen till vilken noggrannhet man vill.  $\square$

## 6 Fraktaler i komplex dynamik

Flera av de mest kända fraktalerna uppkommer inom komplex dynamik. En av dem, Mandelbrotmängden, har fått sitt namn efter Benoît Mandelbrot som myntade begreppet fraktaler. Den och Juliamängderna är exempel på hur synbart enkla funktioner kan ge upphov till mycket intressanta och ofta vackra fraktaler. Eftersom komplex dynamik bygger på metoder från komplex analys behandlar vi inte detaljer särskilt djupgående. Istället bekantar vi oss med hur fraktaler uppkommer och hänvisar intresserade läsare till vidare studier. En del grundläggande begrepp från komplex analys som absolutbelopp och argument samt hur komplex multiplikation kan tolkas grafiskt är ändå en förutsättning för att kunna förstå kapitlet.

Komplex dynamik handlar om hur dynamiska system uppför sig vid iterationer av komplexa funktioner. Dynamiska system ger också upphov till fraktaler för reellvärda funktioner, se t.ex. Falconer [12, kap. 13]. I korthet är ett dynamiskt system en modell som anger hur en variabel ändrar med tiden enligt någon given regel. I den här avhandlingen betraktar vi bara diskreta dynamiska system där tiden mäts i steg. Ett exempel är den logistiska avbildningen  $f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_r(x) = rx(1 - x)$  som för något reellt tal  $r$  itereras genom  $x_{n+1} = f_r(x_n)$ . Om  $0 < r \leq 4$  så kommer  $f$  att avbilda  $[0, 1]$  på sig själv. Genom att börja med något begynnelsevärde  $x$  och sedan iterera funktionen så kommer banan  $\{f_r^k(x)\}_{k=0}^\infty$  att bete sig olika för olika startvärden och olika värden på  $r$ . I en del dynamiska system kommer den invarianta mängden att utgöras av en fraktal. För den logistiska avbildningen beror banans stabilitet på  $r$ . För en del  $r$  kommer banan att närma sig en fixpunkt och för andra  $r$  kommer banan att närma sig en periodisk bana, se definitioner i sektion 1.1. För andra värden på  $r$ , t.ex.  $r \approx 3,56995$ , är banan kaotisk för nästan alla begynnelsevärden  $x$  och då är den invarianta mängden en fraktal som påminner om Cantormängden. Den banan har därför ofta använts i pseudoslumtalsgeneratorer. Om vi istället ser på funktionen  $f_r$  med  $r > 4$  kommer  $f_r^k(x) \rightarrow -\infty$  för alla begynnelsevärden  $x$  förutom för en cantorliknande delmängd av  $[0, 1]$ .

I det här kapitlet tittar vi på två sorters fraktaler; Juliamängder och Mandelbrotmängden. Juliamängderna består av invarianta mängder för en viss sorts komplexvärd funktion och Mandelbrotmängden har en nära koppling till dem. Kapitlet bygger på Devaney [8], Falconer [12] och Barnsley [1] förutom där andra källor är angivna.

### 6.1 Det utökade komplexa talplanet

Innan vi börjar undersöka Juliamängder och Mandelbrotmängden måste vi säga något om det utökade komplexa talplanet. De komplexa talen  $\mathbb{C}$  består av tal  $z = x + iy$

där  $x$  och  $y$  är reella tal och kallas talets reella respektive imaginära del och  $i$  är den *imaginära enheten* för vilken  $i^2 = -1$ . De komplexa talen brukar oftast beskrivas som ett plan med de reella talen på  $x$ -axeln och de imaginära talen på  $y$ -axeln. När vi talar om Juliamängder så är vi dock intresserade av något som vi kallar det utökade komplexa talplanet  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  där  $\infty$  behandlas som en punkt bland alla andra. Några av de räkneregler som gäller i  $\bar{\mathbb{C}}$  är

$$\begin{array}{lll} z + \infty = \infty + z = \infty & z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \ (z \neq 0) & z/\infty = 0 \\ \infty + \infty = \infty & \infty \cdot \infty = \infty & z/0 = \infty \ (z \neq 0), \end{array}$$

där  $z \in \mathbb{C}$ . Som vi märker är det inga problem att dividera med 0, men en del operationer är ändå odefinierade.

Ofta visualiserar man det utökade komplexa talplanet med hjälp av Riemannsfären som är en sfär med talet 0 på sydpolen och  $\infty$  på nordpolen. Enhetscirkeln som består av talen  $|z| = 1$  befinner sig på Riemannsfärens ekvator.

Juliamängder definieras vanligtvis för analytiska funktioner i  $\mathbb{C}$ . Inom komplex analys är en funktion  $f$  analytisk vid  $z_0$  om och endast om den komplexa derivatan  $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existerar. Att funktionen är analytisk vid  $z_0$  innebär att funktionen i en omgivning  $U$  av  $z_0$  är identisk med sin taylorutveckling  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ . Vi säger att en funktion är analytisk om den är analytisk i hela sin definitions-mängd.

I det här kapitlet undersöker vi bara Juliamängder för polynom (och särskilt polynom av andra graden). Det är inte lika begränsande som man kunde tro eftersom många funktioner är topologiskt konjugerade (engelska: *topologically conjugate*) med polynom. Två avbildningar  $f$  och  $g$  är topologiskt konjugerade om det existerar en homeomorfism  $h$  så att  $h \circ f = g \circ h$  och med avseende på dynamik är de då ekvivalenta. Bl.a. fixpunkter och periodiska punkter behålls under topologisk konjugering, så att om  $x_0$  är en fixpunkt för  $f$  så är  $h(x_0)$  en fixpunkt för  $g$ . Vidare så gäller att om en fixpunkt eller periodisk punkt  $x_0$  är attraherande, neutral eller repellerande för  $f$  så är punkten  $h(x_0)$  också attraherande, neutral respektive repellerande för  $g$ .

**Definition 6.1.** En fixpunkt  $x$  för den analytiska funktionen  $f$  är

- attraherande om  $|f'(x)| < 1$
- neutral om  $|f'(x)| = 1$
- repellerande om  $|f'(x)| > 1$ .

Motsvarande gäller för periodiska punkter med perioden  $n$  men med  $(f^n)'$  istället för  $f'$ .

Vilken typ av fixpunkter och periodiska punkter som en funktion har är mycket intressant när man studerar Juliamängder eftersom de berättar mycket om hur funktionens banor ser ut i deras omgivning.

## 6.2 Juliamängder

Juliamängder har fått sitt namn efter Gaston Julia som gjorde många viktiga upptäckter inom komplex dynamik i början av 1900-talet samtidigt som Pierre Fatou.



För att introducera begreppet Juliamängd tar vi ett exempel på en Juliamängd som inte är en fraktal. Låt  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, f(z) = z^2$ . Eftersom  $|f(z)| < |z|$  då  $|z| < 1$  så är det tydligt att  $f^k(z) \rightarrow 0$  då  $|z| < 1$  (och  $k \rightarrow \infty$ ). På samma sätt gäller att  $f^k(z) \rightarrow \infty$  då  $|z| > 1$ . För tal som ligger på enhetscirkeln  $|z| = 1$  är däremot  $|f^k(z)| = 1$  för alla  $k$ . Funktionen har två fixpunkter, 0 och  $\infty$ , och de är båda attraherande. Att  $\infty$  är en attraherande fixpunkt kan vi undersöka genom att konjugera  $f$  med  $h(z) = 1/z = h^{-1}(z)$ . Vi får då en funktion  $g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  enligt

$$g(z) = h \circ f \circ h^{-1}(z) = 1/(1/z)^2 = z^2$$

där  $0 = h(\infty)$  är en attraherande fixpunkt för  $g$ , alltså måste  $\infty$  vara en attraherande fixpunkt för  $f$ . De tal för vilka  $f^k(z) \rightarrow 0$  och  $f^k(z) \rightarrow \infty$  kallas stabila och utgör det som kallas funktionens Fatoumängd  $F(f) = \{|z| < 1\} \cup \{|z| > 1\}$ . Fatoumängdens komplement, i det här fallet enhetscirkeln  $|z| = 1$ , kallas funktionens Juliamängd  $J(f)$ .

Det finns flera ekvivalenta definitioner för en funktions Juliamängd. För en polynomfunktion  $P$  kan vi definiera Juliamängden som följer.

**Definition 6.2.** Låt  $P : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  vara en komplexvärd polynomfunktion. Funktionen fyllda Juliamängd är då mängden  $K(P) = \{z \in \mathbb{C} : P^k(z) \not\rightarrow \infty\}$  och funktionens Juliamängd är den fyllda Juliamängdens rand  $J(P) = \partial K(P)$ . Juliamängdens komplement kallas Fatoumängden  $F(P)$ .

För funktionen  $f(z) = z^2$  ser vi tydligt att  $f$  avbildar  $F(f)$  på  $F(f)$  och  $J(f)$  på  $J(f)$ . Eftersom punkter i Fatoumängden kallas stabila så borde Juliamängden på något vis vara instabil. Den är de facto kaotisk. Devaney [8] definierar en kaotisk funktion enligt följande.

**Definition 6.3.** Låt  $E \subset X$ . En funktion  $f : E \rightarrow E$  är kaotisk på  $E$  om

- det finns ett  $\delta > 0$  så att det för alla  $x \in E$  och alla omgivningar  $U$  till  $x$  existerar ett  $y \in U$  och  $k > 0$  så att  $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$
- $f$  är topologiskt transitiv, d.v.s. om det för varje par av icke-tomma öppna mängder  $U, V \subset E$  existerar ett  $k > 0$  så att  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$
- och funktionens periodiska punkter är täta i  $E$ .

Sammanfattningsvis är en kaotisk avbildning enligt Devaney oförutsägbar, omöjlig att dela in i invarianta öppna delmängder men har ändå ett drag av regelbundenhet.

Att funktionen  $f(z) = z^2$  är kaotisk på  $J(f)$  kan vi se genom att undersöka argumentet  $\arg(f^k(z)) = 2^k \arg(z)$ . Om  $z_1, z_2$  är två olika punkter i  $J(f)$  så kan vi välja ett  $k \geq 0$  så att  $|\arg(f^k(z_1)) - \arg(f^k(z_2))| \approx \pi$  oavsett hur litet  $|z_1 - z_2|$  än är. Vi kan välja ett  $k > 0$  så att  $\arg(f^k(U))$  täcker hela intervallet  $[0, 2\pi]$  för vilken öppen delmängd  $U$  i enhetscirkeln som helst. Vi kan också se att alla punkter i  $J(f)$  som har perioden  $n$  satisfierar ekvationen  $\arg(f^n(z)) = 2^n \arg(f(z)) = \arg(z) + 2m\pi$  för något heltal  $m$ , vilket ger att en punkt är periodisk om och endast om  $\arg(z) = 2m\pi/(2^n - 1)$ , där  $0 \leq m \leq 2^n$ . Eftersom det finns  $2^n - 1$  periodiska punkter med perioden  $n$  för alla heltal  $n$  i enhetscirkeln så är de täta i enhetscirkeln.

En alternativ definition för en funktions Juliamängd är att den är det slutna höljet av mängden av funktionens repellerande periodiska punkter. Vi ser att detta stämmer för

enhetscirkeln för funktionen  $f(z) = z^2$  eftersom alla funktionens periodiska punkter ligger på enhetscirkeln och att de är repellerande enligt  $|(f^n)'(z)| = |2nz^{n-1}| = 2n$ . Funktionens Fatoumängd kan i så fall definieras som alla punkter vars bana går mot en attraherande eller neutral fixpunkt eller periodisk punkt. Att denna definition är ekvivalent med den tidigare visar vi inte här.

Som sagt är Juliamängden för avbildningen  $z \mapsto z^2$  inte en fraktal. Om vi däremot undersöker funktioner  $f_c(z) = z^2 + c$  där  $c \in \mathbb{C}$  så kommer vi i allmänhet att få en fraktal. Juliamängder för funktioner av formen  $f_c$  är de mest undersökta och ofta är det just sådana som man syftar på när man pratar om Juliamängder, även om begreppet egentligen omfattar betydligt flera mängder.

Följande sats ger oss en metod för att åskådliggöra Juliamängden genom att rita den fyllda Juliamängden  $K(f_c)$ .

**Sats 6.4.** Låt  $P(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vara ett polynom  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  där  $a_n \neq 0$ . Då existerar ett tal  $R$  så att  $|P(z)| \geq 2|z|$  alltid då  $|z| \geq R$ . Det betyder att om  $|P^k(z)| \geq R$  för något  $z$  och något positivt heltal  $k$  så kommer  $P^k(z) \rightarrow \infty$ . Om det å andra sidan inte existerar något sådant  $k$  så kommer mängden  $\{P^k(z)\}_{k=0}^\infty$  att vara begränsad, d.v.s.  $z \in K(P)$ .

*Bevis.* Vi kan välja ett tillräckligt stort  $R$  så att  $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|$  och

$$|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0| \leq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$$

alltid då  $|z| \geq R$ . Då ger triangelolikheten att

$$|P(z)| \geq |a_n z^n| - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|) \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|.$$

Resten av satsen följer från detta. □

Tolkningen av satsen är att om  $|P^k(z)|$  når något tröskelvärde  $R$  så hör  $z$  inte till den fyllda Juliamängden  $K(P)$ . För funktionen  $f_c$  kan vi enligt beviset till sats 6.4 välja  $R = \max(4, \sqrt{2|c|})$ . Vi kan däremot hitta ett lägre tröskelvärde genom att ta reda på för vilka värden av  $|z|$  som  $|f_c(z)| > |z|$ , med strikt olikhet men utan en faktor 2. Med triangelolikheten får vi andragsgradsolikheten  $|z|^2 - |c| > |z|$  vilket har lösningen  $|z| > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}$ . Vi kan alltså konstatera att alla tal  $z$  vars bana i något skede går utanför cirkeln  $|z| = \frac{1}{2} + \sqrt{1/4 + |c|}$  hör till mängden  $\mathbb{C} \setminus K(f_c)$ .

Genom att utnyttja detta tröskelvärde kan vi använda en algoritm som på engelska kallas *Escape-Time Algorithm* eller ETA för att rita approximationer av fyllda Juliamängder  $K(f_c)$ . Principen är att vi för medelpunkten  $z_0$  av varje pixel i en bild som innehåller cirkeln  $|z| = R = \frac{1}{2} + \sqrt{1/4 + |c|}$  undersöker om  $|f_c^k(z_0)| > R$  för något något  $k = 0, 1, \dots, N$ , där  $N$  är det maximala antalet iterationer vi väljer att göra för varje punkt. Om  $|f_c^N(z_0)| \leq R$  så låter vi pixeln vara svart och annars så låter vi värdet för det minsta  $k$  för vilket  $|f_c^k(z_0)| > R$  bestämma färgen för pixeln. På det viset kommer randen av den svarta regionen på bilden att vara en approximation för Juliamängden  $J(f_c)$ . Det säger sig självt att ju högre tal  $N$  vi väljer och ju fler pixlar vi undersöker desto mer exakt kommer bilden att åskådliggöra Juliamängden.

I figur 6.1 ser vi sex fyllda Juliamängder för olika värden på  $c$ . Den största gråa cirkeln visar tröskelvärdet  $R = \frac{1}{2} + \sqrt{1/4 + |c|}$ . Vi ser att antalet gråa nyanser varierar

beroende på hur fort banorna  $|f_c^k(z_0)|$  överskrider tröskelvärde. I figur 6.1e ser vi att konturen för det svarta området är otydlig, vilket antyder att vi med ett större antal iterationer skulle få ett mindre område som är svart. I figur 6.1f är ingen punkt svart, men vi kan ändå ana var Juliamängden finns. Faktum är att  $J(f_i) = K(f_i)$ . I figur 6.1c är Juliamängden  $J(f_{-2})$  faktiskt inte en fraktal, utan det reella intervallet  $[-2, 2]$ .

I vanliga fall brukar man använda tröskelvärdet  $R = 2$ . Då är Juliamängden innanför  $|z| = R$  för alla  $|c| \leq 2$ . På det viset är det lättare att jämföra de olika gråskalorna mellan figurerna. I sektion 6.3 ser vi att om  $|c| > 2$  så är  $K(f_c)$  totalt osammanhängande.

En annan av de vanligaste metoderna för att åskådliggöra Juliamängder påminner om kaospelet (se 3.3) och bygger delvis på följande sats.

**Sats 6.5.** *Låt  $P(z)$  vara ett polynom. Då är  $J(P) \subset K(P)$  icke-tomma och kompakta. Vidare gäller att Juliamängden är både framåt- och bakåtinvariant under  $P$ , d.v.s.  $P(J(P)) = J(P) = P^{-1}(J(P))$ .*

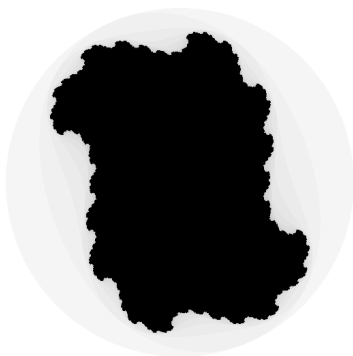
*Bevis.* Enligt sats 6.4 så är  $K(P) \subset B(0, R)$  för något tillräckligt stort  $R$ , så  $J(P)$  och  $K(P)$  är begränsade. Vidare gäller att ett tal  $z$  hör till  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K(P)$  endast om det finns något heltal  $k$  för vilket  $|P^k(z)| > R$ . Eftersom  $P$  är kontinuerlig så finns det en tillräckligt liten boll  $B(z, \delta)$  för vilken  $|P^k(w)| > R$  för varje  $w \in B(z, \delta)$ . Med andra ord är  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K(P)$  öppen och som en följd är  $K(P)$  sluten.  $J(P)$  är randen till  $K(P)$  alltså är  $J(P)$  och  $K(P)$  kompakta.

Eftersom varje polynom har åtminstone en fixpunkt  $z_0 \neq \infty$  så måste  $z_0 \in K(P)$ , vilket gör att  $K(P)$  är icke-tom. Sats 6.4 garanterar att  $\infty \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K(P)$  vilket gör att komplementet till  $K(P)$  också är icke-tomt. Därmed är randen  $J(P)$  icke-tom.

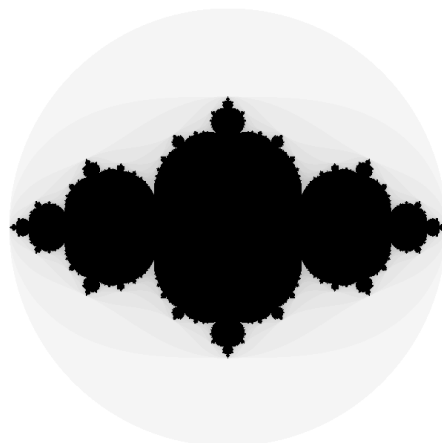
Vi visar sedan att  $J(P)$  är invariant under  $P$ . Att  $K(P)$  är invariant under  $P$  följer av sats 6.4, så om  $z \in J(P) \subset K(P)$  så är  $P(z) \in K(P)$ . Vi behöver alltså visa att  $P(z)$  ligger på randen till  $K(P)$  för alla  $z \in J(P)$ . För varje punkt på  $\partial K(P)$  finns det en följd  $(w_n) \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K(P)$  för vilken  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = z$ . Eftersom  $P$  är kontinuerlig så måste också följden  $(P(w_n))$  höra till  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K(P)$  och  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(w_n) = P(z)$ , vilket gör att  $P(z) \in \partial K(P) = J(P)$  för varje  $z \in J(P)$ .

På motsvarande sätt kan vi konstatera att om  $P(z_0) = z \in J(P)$  så finns det en följd  $(w'_n) \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K(P)$  för vilken  $P(w'_n) = w_n$  för varje  $n$  så att  $\lim_{n \rightarrow \infty} w'_n = z_0$ . Med andra ord är också  $P^{-1}(z) \in J(P)$  för varje  $z \in J(P)$ .  $\square$

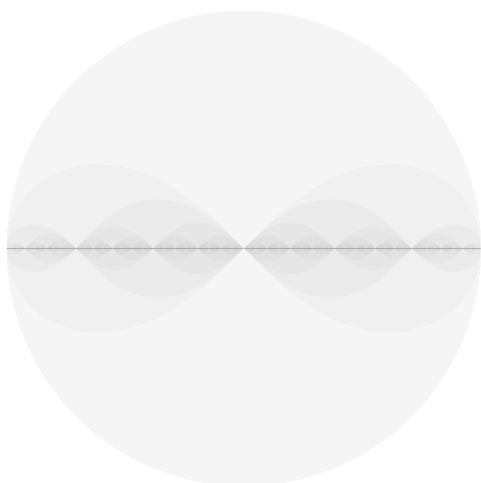
Att  $P^{-1}(J(P)) = J(P)$  kan vidare preciseras till att om  $z \in J(P)$  så är  $J(P)$  det slutna höljet för Urbilderna till  $z$ , d.v.s.  $J(P) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} P^{-k}(z)}$ . Att detta är fallet bygger på Montels sats och normala familjer av analytiska funktioner, se t.ex. [8]. Observera att  $P^{-1}(z)$  inte är entydigt. I fallet  $f_c$  så är  $f_c^{-1}(z) = \pm\sqrt{z-c}$ . Mängden  $f_c^{-N}(z)$  har alltså  $2^N$  element. Genom att utgå från något värde  $z_0 \in J(f_c)$  kan vi alltså generera en mängd med  $2^{N+1} - 1$  punkter i  $J(P)$ . Med ett tillräckligt stort  $N$  kommer vi då att få en bild som approximerar  $J(f_c)$ . Den här metoden kallas för *Inverse Iteration Method* eller IIM. Metoden har en stor nackdel; punkterna i  $\bigcup_{N=0}^{\infty} f_c^{-N}(z_0)$  behöver inte vara särskilt jämnt utspridda över  $J(f_c)$ . Vi kan alltså behöva ett väldigt stort  $N$  för att garantera att punkterna representerar hela  $J(f_c)$ . Istället för att rita alla  $2^{N+1} - 1$  punkter i  $\bigcup_{N=0}^{\infty} f_c^{-N}(z_0)$  så kan vi i likhet med kaospelet (se sektion 3.3) välja en av grenarna i  $f_c$  slumpmässigt i varje iteration och rita de  $N$  punkterna i en slumpmässig följd. Faktum är att vi



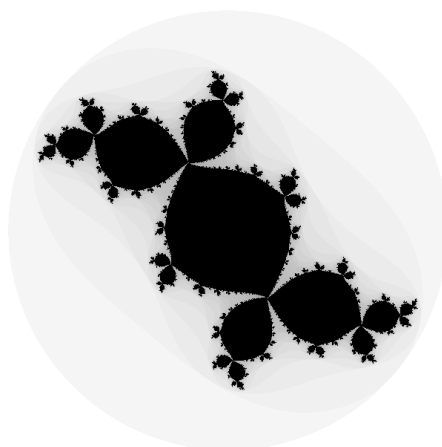
(a)  $c = 0,25 + 0,25i$



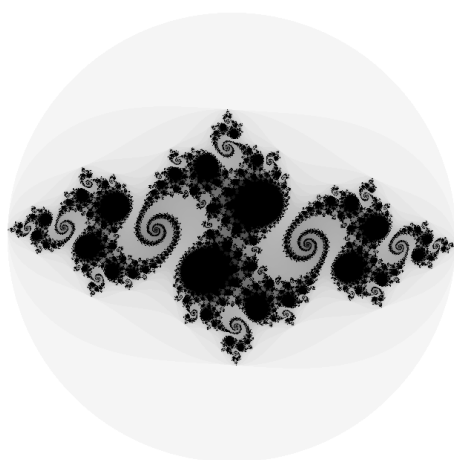
(b)  $c = -0,7$



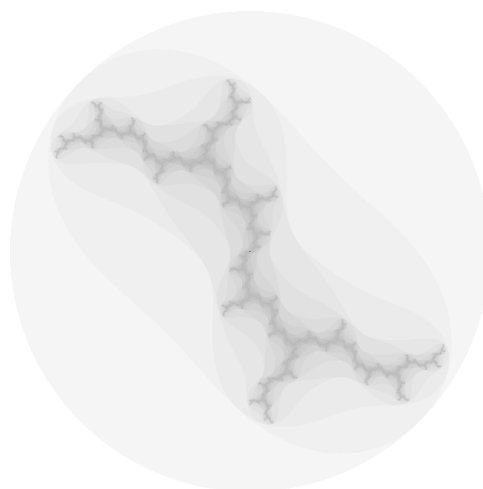
(c)  $c = -2$



(d)  $c = -0,13 + 0,7i$



(e)  $c = 0,77 + 0,1i$



(f)  $c = i$

Figur 6.1: Fyllda Juliamängder för funktionerna  $f_c = z^2 + c$  ritade med hjälp av en Escape-Time Algorithm programmerad i python. Juliamängden är randen för de svarta områdena.

kan se Juliamängden som attraktorn för ett IFS på en icke-tom, kompakt delmängd av  $\overline{\mathbb{C}}$ , t.ex.  $\overline{B(0, 1 + \sqrt{1/4 + |c|})}$ , med grenarna för  $f_c^{-1}$  som kontraktionsavbildningar. Tekniskt sett är den här attraktorn inte unik eftersom det existerar åtminstone en fixpunkt för  $f_c^{-1}$  i det inre av  $K(f_c)$ , men i praktiken fungerar det bra eftersom dessa fixpunkter är repellerande för  $f_c^{-1}$ . Den här metoden kallas ofta för *Random Inverse Iteration Method* eller RIIM fungerar och den fungerar p.g.a. följande sats, vars bevis hittas i [8].

**Sats 6.6.** Låt  $P : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  vara en polynomfunktion. Då är  $P$  är kaotisk på  $J(P)$ .

RIIM är inte heller särskilt tillförlitlig. Vi ser i figur 6.2 att bilderna för stora  $N$  inte representerar hela Juliamängden. Därför är det värt att testa flera metoder när man ska rita en Juliamängd. En alternativ metod, som vi kan kalla *Modified Inverse Iteration Method* eller MIIM, bygger på att man i varje iteration ritar varje punkt i  $f_c^{-k}(z_0)$  som inte ligger väldigt nära någon punkt som man redan ritat i någon tidigare iteration. Två punkter är 'väldigt nära' varandra om de för någon upplösning skulle ritas i samma pixel. Vi kan utgående från figur 6.2 ana att ju större dimension Juliamängden har, desto större antal iterationer  $N$  behövs för att rita den, oavsett vilken metod vi använder.[23]

Vi kunde rita många intressanta bilder med hjälp av dessa metoder, men intresserade läsare uppmanas att använda någon interaktiv Juliamängdgenerator på internet. Dessa ger en möjlighet att fort rita Juliamängder för olika värden på  $c$ . Hur Juliamängder för olika typer av  $c$  ser ut undersöker vi i nästa sektion.

## 6.3 Mandelbrotmängden

Juliamängder blev populära på 1980-talet då Benoît Mandelbrot började skapa datorgenererade bilder av dem. Han var också den första som skapade en bild av det som senare fick namnet Mandelbrotmängden och som har en stark koppling till Juliamängder för funktionerna  $f_c$ .

Vi påminner att den fyllda Juliamängden för en funktion  $f_c$  anger för vilka punkter  $z_0$  som  $z_{k+1} = z_k^2 + c \not\rightarrow \infty$  då  $k \rightarrow \infty$ . Mandelbrotmängden består däremot av de konstanter  $c$  för vilka  $z_{k+1} = z_k^2 + c \not\rightarrow \infty$  då  $z_0 = 0$  och  $k \rightarrow \infty$ .

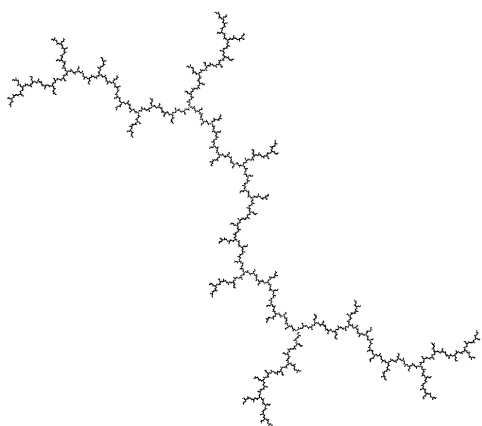
**Definition 6.7.** Mandelbrotmängden  $\mathcal{M}$  är mängden av punkter  $c \in \mathbb{C}$  för vilka följderna  $\{f_c^k(0)\}_{k=1}^\infty$  är begränsad då  $f_c : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  definieras enligt  $f_c(z) = z^2 + c$ .

*Anmärkning 6.8.* En alternativ formulering är att Mandelbrotmängden  $\mathcal{M}$  är mängden av punkter  $c \in \mathbb{C}$  för vilka gränsvärdet  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^k(0)$  inte existerar eller  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^k(0) \neq \infty$  då  $f_c : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  definieras enligt  $f_c(z) = z^2 + c$ .

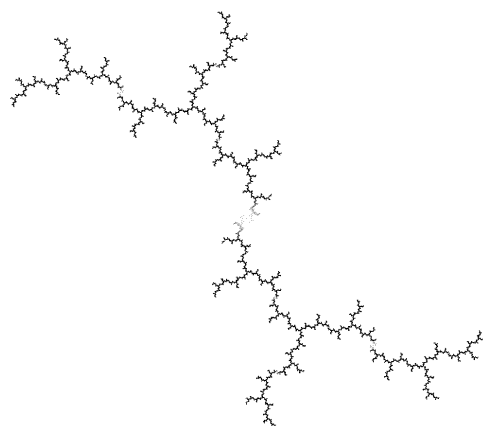
För att rita Mandelbrotmängden med en *Escape-Time Algorithm* så behöver vi hitta ett tröskelvärde. Det visar sig att  $R = 2$  fungerar.

**Sats 6.9.** Låt  $f_c : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  vara  $f_c(z) = z^2 + c$  och  $|c| \leq 2$ . Då gäller att  $|f_c(z)| > |z|$  då  $|z| > 2$ . Vidare gäller att om  $|f_c^k(z)| > 2$  för något  $k$  så är  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^k(z) = \infty$ .

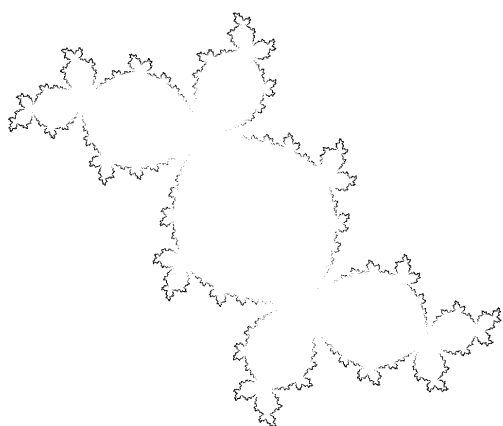
*Bevis.* Låt  $|z| > 2$  och  $|c| \leq 2$ . Då gäller att  $|f_c(z)| \geq |z|^2 - |c| > 2|z| - 2 > |z|$ , alltså är  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f_c(z)^k| = \infty$  och  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c(z)^k = \infty$ .  $\square$



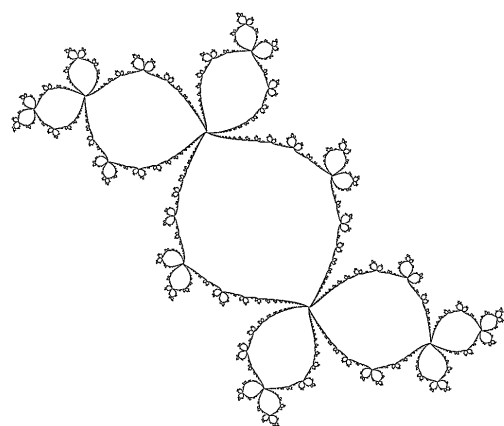
(a) RIIM med  $c = i$  och  $N = 10^6$ .



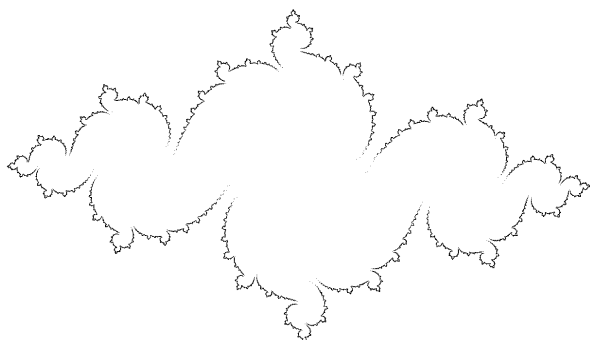
(b) MIIM med  $c = i$  och  $N = 30$ .



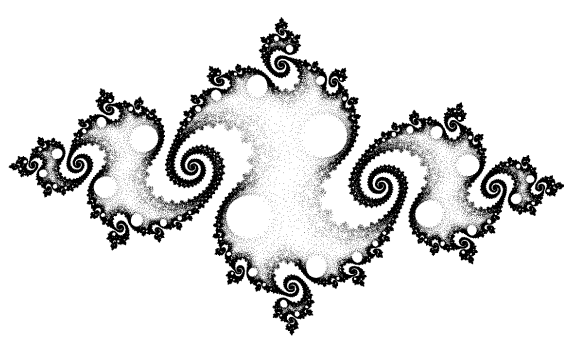
(c) RIIM med  $c = -0,13 + 0,7i$  och  $N = 10^7$ .



(d) MIIM med  $c = -0,13 + 0,7i$  och  $N = 100$ .



(e) RIIM med  $c = -0,77 + 0,1i$  och  $N = 10^7$ .



(f) MIIM med  $c = -0,77 + 0,1i$  och  $N = 500$ .

Figur 6.2: Juliamängder för funktionerna  $f_c = z^2 + c$  ritade med RIIM och MIIM programmerade i python, där  $N$  är antalet iterationer. Motsvarande fyllda Juliamängder finns i figur 6.1.

Vi har visat att  $R = 2$  duger bra som tröskelvärde då  $|c| \leq 2$ . Följande sats visar att inget  $c$  för vilket  $|c| > 2$  hör till Mandelbrotmängden.

**Sats 6.10.** Låt  $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vara  $f_c(z) = z^2 + c$  för något  $c$  med  $|c| > 2$ . Då gäller att  $|f_c(z)| > |z|$  då  $|z| \geq |c|$  och att  $f_c^k(0) \rightarrow \infty$  då  $k \rightarrow \infty$ .

*Bevis.* Låt  $r \geq |c| > 2$ . Funktionen  $f_c$  avbildar cirkeln  $|z| = r$  på en cirkel med mittpunk-

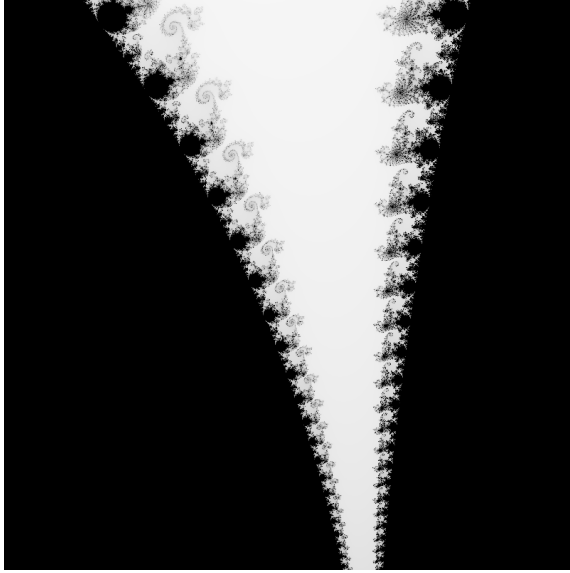
ten  $c$  och radien  $r^2$ . Eftersom  $r^2 > 2r$  så ligger denna cirkel utanför cirkeln  $|z| = r$ , alltså gäller  $|f_c(z)| > |z|$  alltid då  $|z| \geq |c|$ . Eftersom  $|f_c(0)| = |c|$  så följer att  $|f_c^k(0)| > |f_c^{k-1}(0)|$  för varje positivt heltal  $k$ , vilket bevisar satsen.  $\square$

Nu kan vi använda en *Escape-Time Algorithm* med tröskelvärde  $R = 2$  för att rita Mandelbrotmängden, vilken vi ser i figur 6.3. Figuren är inte centrerad kring origo utan visar området från  $-2+1,5i$  i övre vänstra hörnet till  $1-1,5i$  i det lägre högra hörnet. Mandelbrotmängden visar upp flera av de egenskaper som vi förknippar med fraktaler. Den har ingen uppenbar självlikhet, men när man zoomar in på olika ställen så kan man hitta delar som är väldigt lika hela mängden. Om man undersöker olika delar av Mandelbrotmängdens rand så kan man hitta alla möjliga intressanta upprepande mönster, och ytterligare inzoomning kan sedan visa helt andra mönster. Mandelbrotmängden är kanske mest känd för sådana zoomningar. Figur 6.4 visar en inzoomning på punkten  $-0,7646536347 + 0,1013527839i$  som ligger i området mellan de två största regionerna i Mandelbrotmängden. Vi kan i flera av bilderna se små ungefärliga kopior av Mandelbrotmängden.

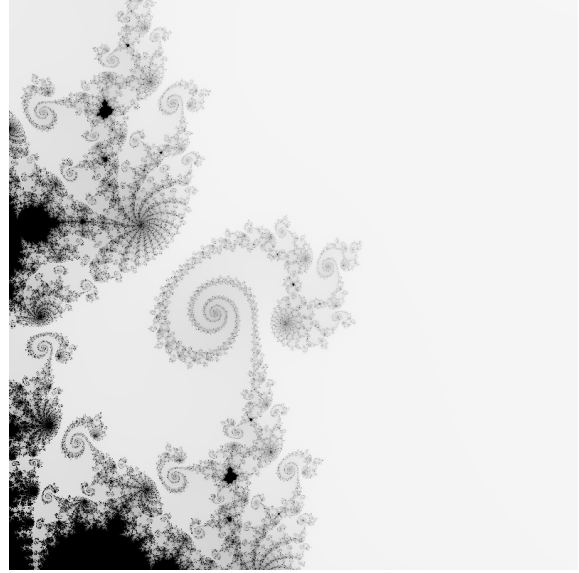


Figur 6.3: Mandelbrotmängden  $\mathcal{M}$ .

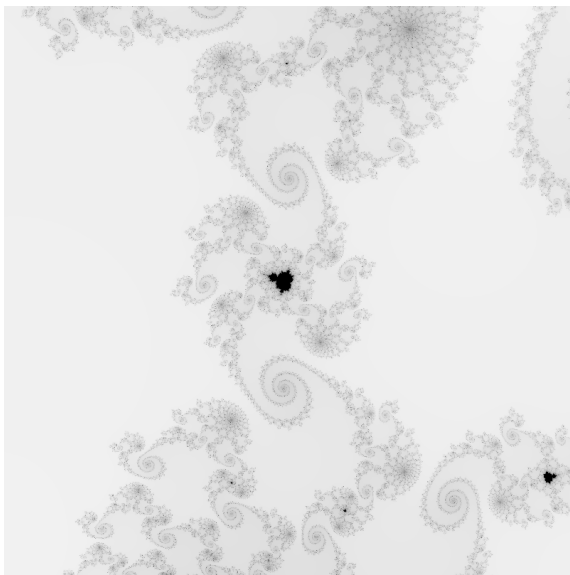
Mandelbrotmängden är intressant i sig själv, men den har en koppling till Julia-mängder för funktionerna  $f_c$  som är verkligt intressant. Följande sats ger en alternativ definition för Mandelbrotmängden.



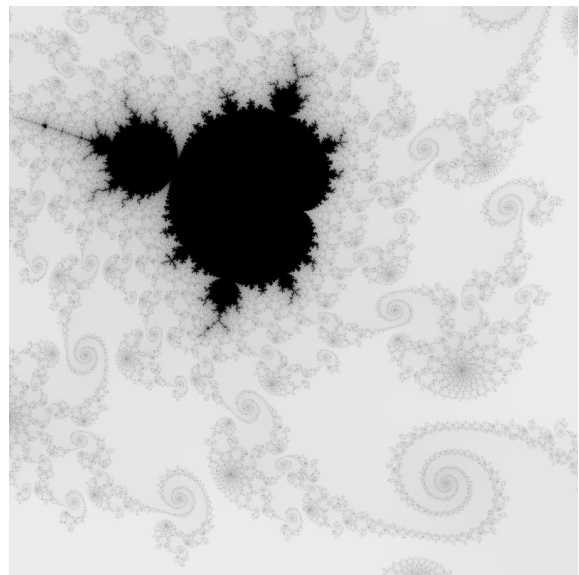
(a)  $D = 10^{-1}$



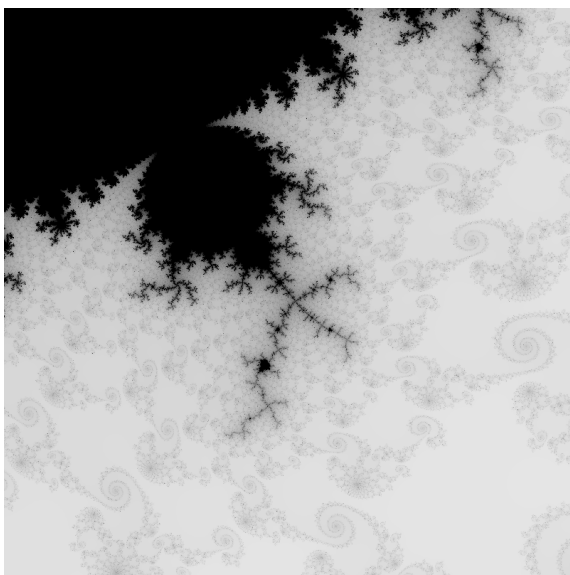
(b)  $D = 10^{-2}$



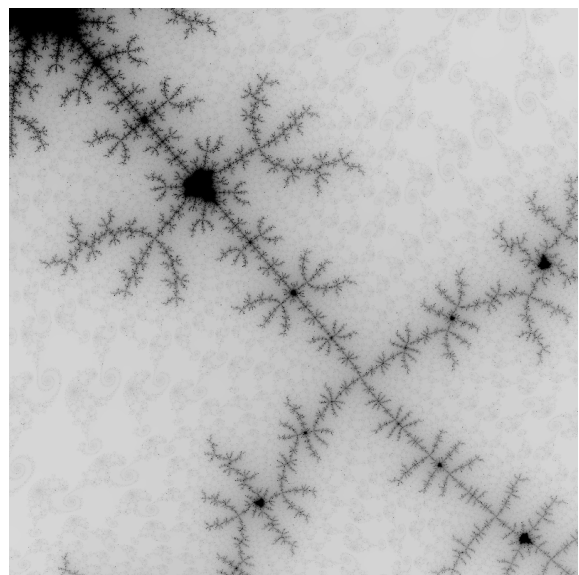
(c)  $D = 10^{-3}$



(d)  $D = 10^{-4}$



(e)  $D = 10^{-5}$



(f)  $D = 10^{-6}$

Figur 6.4: En inzoomning på en punkt i Mandelbrotmängden. Varje bild är centrerad kring punkten  $-0,7646536347 + 0,1013527839i$  och har storleken  $D \times D$ .



**Sats 6.11.** Punkten  $c$  tillhör Mandelbrotmängden  $\mathcal{M}$  om och endast om Juliamängden  $J(f_c)$  är sammanhängande.

För att bevisa satsen behöver vi följande lemma.

**Lemma 6.12.** Låt  $C$  vara en glatt och enkel sluten kurva i  $\mathbb{C}$  och låt  $f_c$  definieras som tidigare.

- (a) Om  $c$  ligger innanför  $C$  så är  $f_c^{-1}(C)$  en glatt och enkel sluten kurva.  $f_c$  avbildar områdena innanför och utanför  $f_c^{-1}(C)$  på områdena innanför respektive utanför av  $C$ .
- (b) Om  $c$  ligger utanför  $C$  så består  $f_c^{-1}(C)$  av två glatta och enkla slutna kurvor. Dessa är disjunkta och ingendera ligger innanför den andra.  $f_c$  avbildar områdena innanför kurvorna på området innanför  $C$  och området utanför kurvorna på området utanför  $C$ .

*Bevis.* Eftersom  $f_c^{-1}(z) = \pm\sqrt{z-c}$  är oändligt deriverbar så länge  $z \neq c$  så är båda grenarna av  $f_c^{-1}(C)$  kurvor som är oändligt deriverbara nästan överallt om  $c \notin C$ .

De två grenarna av  $f_c^{-1}(C)$  kommer att utgöras av kurvor som är varandras spegelbilder genom origo. Låt  $w \in C$  och punkterna  $\pm z_0$  satisfiera  $f_c(\pm z_0) = w$ . Om  $z$  går ett varv motsols längs  $C$  från  $w$  till  $w$  så kommer  $f_c^{-1}(z)$  att gå längs två kurvor som börjar och slutar i någon av punkterna  $\pm z_0$ . Om ena kurvan börjar i  $z_0$  så kommer den antingen att sluta i  $z_0$  eller  $-z_0$ . Vi undersöker hur dessa kurvor beter sig om  $c$  är utanför eller innanför  $C$ .

Om  $c$  är innanför  $C$  så kommer argumentet för punkten  $z-c$  att ändra kontinuerligt från något värde  $\varphi = \arg(w-c)$  till  $\varphi + 2\pi$ , där  $\varphi$  är den gren av argumentet som hör till  $[0, 2\pi)$ . Som en följd kommer argumentet för  $f_c^{-1}(z)$  att ändra kontinuerligt från  $\varphi/2$  till  $\varphi/2 + \pi$  eller från  $\varphi/2 + \pi$  till  $\varphi/2 + 2\pi$  beroende på vilken gren av kvadratroten vi väljer. Med andra ord kommer den gren av  $f_c^{-1}(C)$  vars kurva börjar i  $z_0$  att sluta i  $-z_0$  och vice versa. De båda grenarna av  $f_c^{-1}(C)$  utgör alltså tillsammans en glatt och enkel sluten kurva.

Om  $c$  å andra sidan är utanför  $C$  så kommer argumentet för punkten  $z-c$  att ändra kontinuerligt från värdet  $\varphi = \arg(w-c)$  till  $\varphi$  vilket gör att den gren av  $f_c^{-1}(C)$  som börjar i  $z_0$  också slutar i  $z_0$  och den som börjar i  $-z_0$  också slutar i  $-z_0$ . Med andra ord utgörs  $f_c^{-1}(C)$  av två slutna och disjunkta kurvor på var sin sida av origo.

Eftersom  $f_c$  är en kontinuerlig funktion så följer det att den avbildar områdena innanför kurvan eller kurvorna i  $f_c^{-1}(C)$  på området innanför  $C$  och motsvarande för områdena utanför kurvorna. □

*Anmärkning 6.13.* Om  $c \in C$  så måste  $0 \in f_c^{-1}(C)$ . Faktum är att punkten origo finns i båda grenarna av  $f_c^{-1}(C)$  vilket gör att grenarna tillsammans utgör en figur som påminner om en åtta med skärningspunkten i origo.

*Bevis för sats 6.11.* Per definition så gäller att  $c \in \mathcal{M}$  om och endast om  $f_c^k(0) \not\rightarrow \infty$  då  $k \rightarrow \infty$ . Vi bevisar satsen genom att visa att om  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^k(0) \neq \infty$  så är  $J(f_c)$  sammanhängande och om  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^k(0) = \infty$  så är  $J(f_c)$  inte sammanhängande.

Vi visar först att om  $f_c^k(0) \not\rightarrow \infty$  så är  $J(f_c)$  sammanhängande. Låt  $C$  vara en så stor cirkel att hela mängden  $\{f_c^k(0)\}_{k=0}^\infty$  ligger innanför  $C$  och så att alla punkter utanför  $C$  går mot  $\infty$  under iteration av  $f_c$  i enlighet med sats 6.9. Eftersom  $c = f_c(0)$  ligger innanför  $C$  så kan vi använda lemma 6.12a för att få en ny glatt och enkel sluten kurva  $f_c^{-1}(C)$ .  $f_c^{-1}(C)$  måste ligga innanför  $C$  eftersom alla punkter utanför  $C$  går

mot  $\infty$  under iteration av  $f_c$ . Vidare gäller att alla punkter utanför  $f_c^{-1}(C)$  också går mot  $\infty$  under iteration av  $f_c$  eftersom  $f_c$  avbildar området utanför  $f_c^{-1}(C)$  på området utanför  $C$ . Med samma motivering ligger också  $c$  innanför  $f_c^{-1}(C)$ . Vi kan upprepa processen och får en följd av slutna kurvor  $\{f_c^{-k}(C)\}_{k=0}^{\infty}$ . Om vi låter  $K$  beteckna mängden av punkter innanför varje kurva i följderna så gäller att  $f_c^k(w) \rightarrow \infty$  då  $k \rightarrow \infty$  för alla  $w \in \mathbb{C} \setminus K$  men  $\{f_c^k(z)\}_{k=0}^{\infty} \in K$  för alla  $z \in K$ . Med andra ord är  $K = K(f_c)$  den fyllda Juliamängden för  $f_c$ . Eftersom  $K$  är snittet av en avtagande följd av slutna, enkelt sammanhängande mängder (d.v.s. mängder som är sammanhängande och har ett sammanhängande komplement) så är också  $K$  enkelt sammanhängande och måste därför ha en sammanhängande rand. Med andra ord är  $J(f_c)$  sammanhängande.

Vi visar sedan att om  $f_c^k(0) \rightarrow \infty$  så är  $J(f_c)$  inte sammanhängande. Igen låter vi  $C$  vara en så stor cirkel att  $f_c^{-1}(C)$  ligger innanför  $C$  och så att punkter utanför  $C$  itereras mot  $\infty$ , men så att ingen av punkterna i  $\{f_c^k(0)\}_{k=0}^{\infty}$  ligger på  $C$ . Låt  $p$  vara det största heltal så att  $f_c^p(0)$  ligger innanför  $C$ . Vi använder lemma 6.12a för att bilda en följd  $\{f_c^{-k}(C)\}_{k=0}^p$ . Eftersom  $c = f_c(0)$  ligger utanför  $f_c^{-p}(C)$  så måste vi använda lemma 6.12b för att fortsätta vår följd av slutna kurvor.  $f_c^{-p-1}(C)$  består då av två slutna kurvor inuti  $f_c^{-p}(C)$  och för varje punkt  $w$  utanför dessa två kurvor gäller att  $f_c^k(w) \rightarrow \infty$  då  $k \rightarrow \infty$ . Med andra ord ligger  $J(f_c)$  innanför de slutna kurvorna  $f_c^{-p-1}(C)$  och eftersom Juliamängden är invariant under  $f_c$  så måste det finnas delar av Juliamängden i båda kurvorna. Med andra ord är Juliamängden inte sammanhängande. Genom att upprepa lemma 6.12b på de slutna kurvorna i  $f_c^{-k}(C)$  där  $k > p$  så får vi en avtagande följd av slutna disjunkta kurvor vars antal ökar exponentiellt. Eftersom delar av Juliamängden finns i området innanför varje sådan sluten kurva så är Juliamängden till och med totalt osammanhängande.  $\square$

Det visar sig alltså att Mandelbrotmängden är en sorts karta för Juliamängder. Alla  $c \in \mathcal{M}$  ger en Juliamängd  $J(f_c)$  som är sammanhängande och alla  $c \notin \mathcal{M}$  ger en Juliamängd  $J(f_c)$  som är totalt osammanhängande. Utöver det kan Mandelbrotmängden berätta mera om den motsvarande Juliamängdens struktur. Resten av kapitlet beskriver en del av dessa samband, men utan några bevis.

Genom att dela in Mandelbrotmängden i olika regioner och undersöka hur de motsvarande Juliamängderna ser ut för  $c$  från de olika regionerna kan man konstatera en del samband. Alla  $c$  i den största regionen av Mandelbrotmängden (som ofta kallas för huvudkardioiden eller på engelska *main cardioid*) åstadkommer en Juliamängd som är en enkel sluten kurva i stil med figur 6.1a. Sådana funktioner  $f_c$  har en attraktiv fixpunkt. Om  $c$  finns i någon av de angränsande knopparna i Mandelbrotmängden så har  $f_c$  attraktiva periodiska punkter (vars antal och period beror på vilken knopp  $c$  finns i) och en Juliamängd i stil med de som visas i figurerna 6.1d och 6.2d. Att antalet områden som möts i knutpunkterna i figurerna 6.1d och 6.2d är 3 beror på att perioden för de attraktiva periodiska punkterna för  $f_{-0,13+0,7i}$  är 3.

Om  $c$  ligger på någon av de tunna trådarna som sticker ut från Mandelbrotmängden så kan den motsvarande Juliamängden ha en trädliknande form som i figurerna 6.1f och 6.2a. Om  $c$  ligger i någon av de små kopiorna av Mandelbrotmängden så har  $J(f_c)$  också en trädliknande form men med små kopior av den Juliamängd som vars  $c$  finns i motsvarande del av den stora Mandelbrotmängden inbakad i förgreningarna.

Hur olika Juliamängder ser ut undersöks bäst med någon interaktiv applikation, av

vilka det finns gott om på nätet. Ofta gäller att Juliamängdens utseende påminner om hur Mandelbrotmängden ser ut i närheten av  $c$ . Det är värt att undersöka hur utseendet för Juliamängderna ändrar kontinuerligt med avseende på  $c$ . Det är en av anledningarna till varför det kan vara svårt att se om Juliamängder för ett  $c$  nära Mandelbrotmängdens rand är sammanhängande eller inte. En beräkning av banan för  $f_{-0,77+0,1i}^k(0)$  visar att Juliamängden i figur 6.2f är total osammanhängande, trots att den ser sammanhängande ut i bilden. För ett  $c$  längre bort från Mandelbrotmängden skulle det vara tydligare att Juliamängden är osammanhängande.

Överlag hittar vi de mest intressanta Juliamängderna för sådana  $c$  som ligger nära randen av Mandelbrotmängden. Om  $c$  ligger på randen för Mandelbrotmängden så har  $f_c$  en neutral periodisk punkt och dynamiken kring sådana är svårare att undersöka än dynamiken kring attraherande eller repellerande periodiska punkter (intresserade läsare kan leta efter en sats med namnet *Petal theorem* i t.ex. Beardon [4]). Faktum är att Mandelbrotmängdens rand i sig själv är mycket intressant, vilket också märks i att dess hausdorffdimension är  $\dim_H \partial\mathcal{M} = 2$ . Vi beräknar inte dimensionen för Mandelbrotmängdens rand eller någon Juliamängd här, av den enkla anledningen att det är mycket svårt.

Komplex dynamik är ett område som kan fungera bra för att med enkla medel väcka ett intresse för matematik. Också på ett djupare plan innehåller området många intressanta resultat. Vidare studier kräver goda baskunskaper inom komplex analys men är också mycket givande.

## 7 Tillämpningar

Hittills har vi behandlat vad fraktaler är, hur man kan klassificera dem utgående från deras fraktaldimension och grunderna för hur itererade funktionssystem kan användas för att skapa och undersöka fraktaler. Vi har också tittat på några olika kontexter där fraktaler uppkommer. Vad vi inte har behandlat är vilken nytta vi har av fraktaler och varför de är värda att studera.

Man kan tänka sig att fraktaler är en samling mängder som visar på brister i "klassisk geometri" men som inte är mycket mer än en kuriositet utan tillämpningar. Eftersom fraktaler har en detaljerad struktur på varje nivå så är det givet att det inte existerar några fraktaler i vår fysiska verklighet vars struktur inte kan vara finare än de minsta beståndsdelarna. Det man då inte tänker på är att det inte heller existerar några klassiska geometriska objekt i den fysiska verkligheten. Inget klot är helt slätt då man tittar på dess yta under tillräckligt stark inzoomning. Faktum är att strukturen för de flesta material antagligen påminner mera om en fraktal ju lägre skala man använder. En förståelse för fraktaler kan alltså hjälpa oss att förstå strukturer på mikroskopisk nivå.

Också på makroskopisk nivå kan man hitta många föremål med fraktala egenskaper. Ett träd och dess grenar och kvistar är på många sätt självliknande och en del växter, bl.a. romanesco, är anmärkningsvärt självliknande. Andra typiska exempel på föremål med fraktala egenskaper i naturen är snöflingor och en människas lungvävnad. Också elektriska urladdningar visar tecken på fraktala egenskaper då de sker vid hög spänning. Fraktaler kan användas för att modellera sådana föremål och fenomen.

I kapitel 4 konstaterade vi att man också kan använda självaffina funktioner för att interpolera data. Det finns många mätningar vars grafer visar flera fraktala egenskaper och som därför med fördel kan modelleras med hjälp av just fraktala interpolationsfunktioner. Fraktaler används också för att göra modeller av bland annat berg. En simulerad värld i exempelvis ett datorspel kan innehålla verklighetstrogna miljöer skapade med hjälp av itererade funktionssystem vars kontraktioner bestäms någorlunda slumpmässigt. Miljöerna kan på så vis variera från gång till gång. Vi konstaterade också att IFS kan användas för att komprimera bilder och annan data.

I kapitel 6 behandlade vi fraktaler i kontexten komplex dynamik. Dessa fraktaler hör till de mest kända och är en så gott som utesluten källa för intressanta former. Vi behandlade området komplex dynamik ytligt för att bygga upp den grund som behövs för att förstå hur fraktalerna uppkommer. Komplex dynamik är emellertid ett betydligt större område med många viktiga tillämpningar. Eftersom Juliamängder nästan alltid är fraktaler och är ett mycket viktigt koncept inom komplex dynamik så är det också viktigt att ha en förståelse för fraktaler när man undersöker olika banor i ett dynamiskt system. Detsamma gäller för reellvärda dynamiska system, t.ex. i fluiddynamik; också

differentialekvationssystem kan ha fraktala attraktorer. [12]

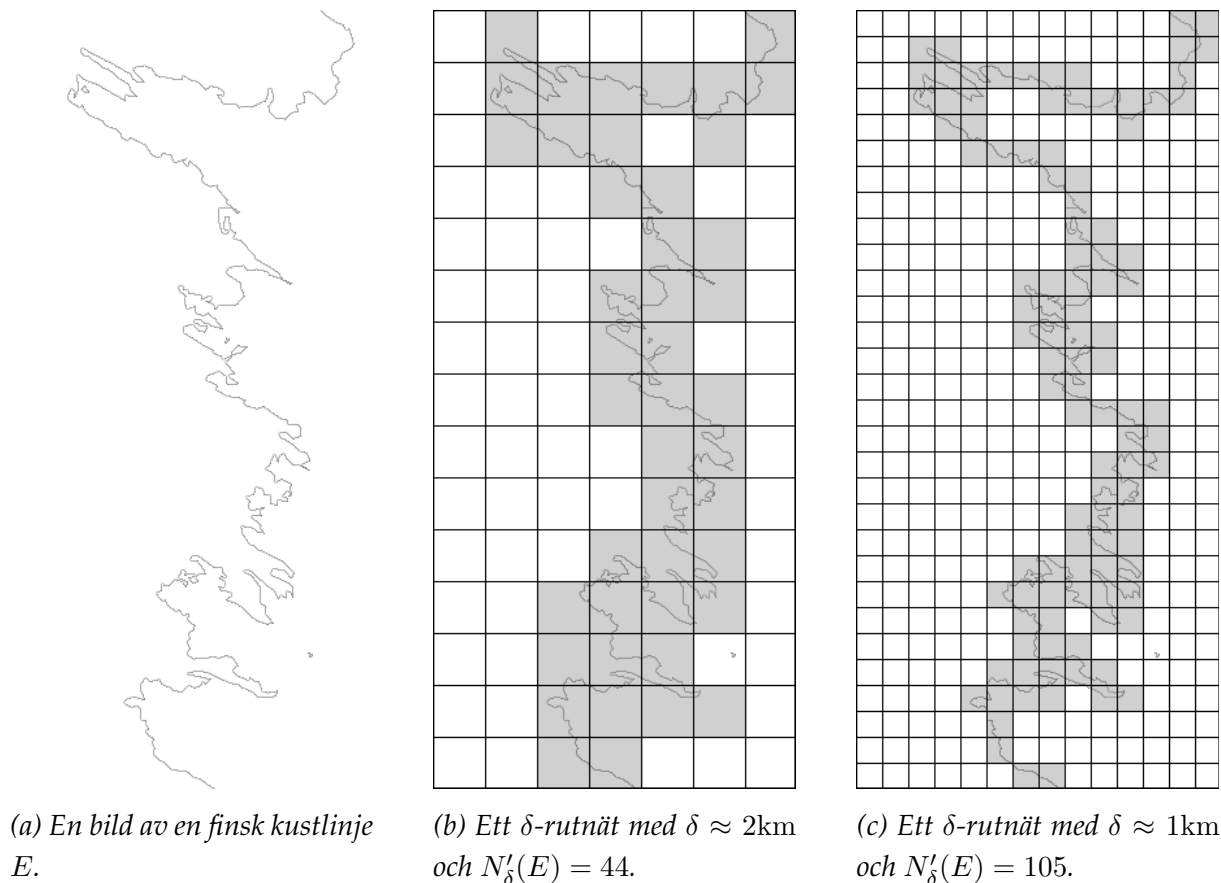
Ett område som vi inte ännu har nämnt där fraktaler är viktiga är studierna av s.k. Brownska rörelser. En Brownsk rörelse är den oregelbundna banan hos små partiklar i en vätska eller en gas. Brownska rörelser har fraktala egenskaper vilket beror på att partiklarna hela tiden krockar med andra partiklar på ett slumpmässigt sätt. Det finns en rigorös matematisk modell för Brownska rörelser som också har använts för att göra modeller av allt från polymerer till aktiekurser. Att flera naturliga fenomen bäst beskrivs med fraktaler, vilket det enligt Feder [13] finns mycket belägg för, beror just på att de till synes styrs av slumpen. Brownska rörelser förklarades först av Albert Einstein och spelade en stor roll i beräkningen av Avogadros tal. [12]

Feder [13] lyfter fram många fysiska fenomen där fraktaler och deras fraktaldimension ger viktiga insikter. Vi beskriver kort hur man kan tillämpa Minkowskidimensionen på objekt som p.g.a. dess fysiska natur inte kan ha en fraktal struktur på godtyckligt små skalor. I sektion 2.3 konstaterade vi att vi har ett ungefär linjärt beroende

$$\log N'_\delta(E) \approx -(\dim_B E) \log \delta + \log c \quad (7.1)$$

där  $N'_\delta(E)$  är antalet  $\delta$ -nätkuber som överlappar mängden  $E$  och  $c$  är någon konstant. Genom att räkna antalet  $\delta$ -nätkuber som överlappar  $E$  för några olika värden på  $\delta > 0$  kan vi uppskatta Minkowskidimensionen också för fysiska objekt. Ett typiskt exempel är att uppskatta Minkowskidimensionen för kustlinjer. Att bestämma längden för en kustlinje är knepigare än man skulle tro eftersom den blir längre ju fler detaljer man beaktar. Om man försöker använda en karta så kommer man att få en längre kustlinje ju lägre skala man har på kartan. Figur 7.1 visar hur man kan bestämma en kustlinjes Minkowskidimension med hjälp av  $\delta$ -nät. Vi kan använda denna dimension som ett mått på hur ojämn en kustlinje är. Eftersom vi i figur 7.1 bara använder två mätningar vars  $\delta$ -värden är relativt nära varandra så är den uppskattade dimensionen på 1,25 inte tillförlitlig, men det intressanta är att mätvärdena tenderar att visa det linjära samband mellan  $\log N'_\delta(E)$  och  $\log \delta$  som vi ser i (7.1) oavsett vilken kust man undersöker. Norska kusten har en relativt hög Minkowskidimension på ungefär 1,52 medan Britiska kusten ligger på ungefär 1,3. Vi kan också använda Minkowskidimensionen för att uppskatta hur lång en kustlinje skulle vara beroende på ens mätning. Om vi antar att man vill gå längs en kustlinje  $E$  och man har stegländan  $\delta$  så är  $N'_\delta(E) \approx c\delta^{-\dim_B E}$  antagligen en bra approximation på hur många steg man behöver ta, där konstanten  $c$  bestäms från samma regressionsanalys som Minkowskidimensionen. Kustlinjens längd på en "mänsklig skala" är då ungefär  $\delta N'_\delta(E) \approx c\delta^{1-\dim_B E}$  där  $\delta \approx 1\text{m}$ . När man utnyttjar denna princip bör man däremot vara noggrann för att inte göra fel. Gonzato, Mulariga och Marzocchi [14] påpekar att man måste ha en stor mängd data som sträcker sig över flera skalor för att få en tillförlitlig uppskattning av dimensionen.

Vi kan också uppskatta Minkowskidimensionen för andra objekt, som t.ex. vågor eller moln. För vågor och andra ytor kommer dimensionen att vara mellan 2 och 3, där föremål vars dimension är nära 2 är relativt släta och föremål vars dimension är nära 3 är mycket grova och kanske snarare upplevs som kroppar än som ytor. Också här kan dimensionen användas för att uppskatta en ytas area på motsvarande sätt som för kustlinjer. Det är värt att notera att det inte är givet att sambandet mellan  $\log \delta$  och  $\log N'_\delta(E)$  är linjärt på alla nivåer för någon godtycklig mängd  $E$ . Ofta gäller däremot att det är styckvis linjärt. [13]



Figur 7.1: Man kan bestämma Minkowskidimensionen för en kustlinje genom att räkna antalet  $\delta$ -nätrutor som överlappar kustlinjen för olika värden på  $\delta$ . Utgående från dessa värden så har kustlinjen dimensionen  $\dim_B E \approx 1,25$ . Med flera mätvärden och en regressionsanalys skulle man få ett mera tillförlitligt värde. Kustlinjen är hämtad från Google Maps [15] och bearbetad.

Alla håller inte med om att fraktal geometri är användbar för verkliga föremål. Shenker [26] ifråsätter att Mandelbrot med flera talar om “naturens fraktala geometri” och lyfter fram att det är stor skillnad på fraktaler och approximationer av fraktaler. Alla bilder av fraktaler är begränsade av bildens upplösning och är därför bara approximationer av fraktaler. På samma sätt är inte heller några verkliga föremål riktiga fraktaler. Shenker erkänner däremot att fraktaler kan vara användbara som en grov approximation. Shenkers artikel är publicerad i *Studies in History and Philosophy of Science* och har en poäng; det är viktigt att vara medveten om när och hur man kan applicera teorin om fraktaler på verkliga föremål och överlag känna till teorins begränsningar oavsett teori och kontext. Huruvida man kan tala om naturens fraktala geometri eller inte är främst en filosofisk fråga.

Oavsett om det är vettigt att tillämpa teorin om fraktaler på verkliga föremål eller inte så är det klart att fraktaler fascinerar folk. De komplicerade strukturerna och de oändligt små detaljerna ger en kontrast till vad vi är vana med. Att man kan konstruera dem så enkelt med metoderna i sektion 1.2 eller kapitel 6 gör att de är utmärkta för att väcka intresse hos t.ex. elever och påvisa att matematik kan vara mera än aritmetik och elementär algebra.

# Figurer

Alla figurer i denna avhandling är konstruerade av författaren med hjälp av olika källor på nätet.

Figurerna i kapitel 1 är konstruerade med TikZ och figurerna i kapitel 3 är konstruerade i GeoGebra.

Figurerna i kapitel 4 och figur 6.2 är programmerade i Python med matplotlib. I figur 4.1 har också GeoGebra använts.

Figurerna 6.1, 6.3 och 6.4 är programmerade i Python och koden bygger på kod av Ted Burke hämtad 2019-8-18 från <https://batchloaf.wordpress.com/2013/02/10/creating-julia-set-images-in-python/>.

Figur 7.1 är konstruerad utgående från Google Maps [15] och bearbetad i GIMP så att endast kustlinjen för fastlandet syns.

TikZ är ett programmeringsspråk för att rita vektorgrafik direkt i ett L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-dokument. <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/PGF/TikZ>

GeoGebra är en interaktiv matematikmiljö som är fritt tillgänglig för icke-kommersiell användning med öppen källkod. <https://www.geogebra.org/>

GNU Image Manipulation Program (GIMP) är ett fritt bildredigeringsprogram med öppen källkod. <https://www.gimp.org/>

Python är ett enkelt programmeringsspråk med öppen källkod (<https://www.python.org/>) och matplotlib är ett pythonpaket för att rita grafer och figurer i Python (<https://matplotlib.org/>).

Google Maps är en gratis kartbildstjänst från Google. <https://www.google.com/maps>

# Litteraturförteckning

- [1] Barnsley, M. F. (1988). *Fractals Everywhere*. San Diego: Academic Press.
- [2] Barnsley, M. F. & Elton, J. & Hardin, D. & Massopust, P. (1988). Hidden variable fractal interpolation functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20 (5), 1218-1242.
- [3] Barnsley, M. F. & Hurd, L. P. (1993). *Fractal Image Compression*. Natick: A K Peters, Ltd.
- [4] Beardon, A. F. (1991). *Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag.
- [5] Billingsley, P. (1979). *Probability and measure (Wiley series in probability and mathematical statistics)*. New York: John Wiley & Sons.
- [6] Chang, A. & Zhang, T. (1999). The fractal geometry of the boundary of dragon curves, *Journal of Recreational Mathematics*, 30 (1), 9–22.
- [7] Deng, G. (2004). Hausdorff dimension of a fractal interpolation function. *Colloquium Mathematicum*, 99 (4), 275-281.
- [8] Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (2nd Edition). Redwood City: Addison-Wesley.
- [9] Elton, J. (1987). An ergodic theorem for iterated maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 7(4), 481-488.
- [10] Falconer, K. J. (1985). *The Geometry of Fractal Sets (Cambridge Tracts in Mathematics)*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [11] Falconer, K. J. (1989). Dimensions and measures of quasi self-similar sets. *Proceedings of the American mathematical society*, 106(2), 543-554.
- [12] Falconer, K. J. (2014). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* (3rd Edition). Chichester: John Wiley & Sons.
- [13] Feder, J. (1988). *Fractals*. New York: Plenum Press.
- [14] Gonzato, G & Mulargia, F. & Marzocchi, W. (1998). Practical Application of Fractal Analysis: Problems and Solutions. *Geophysical Journal International*, 132(2), 275-282. Hämtad 2019-7-19 från <https://academic.oup.com/gji/article/132/2/275/671597>



- [15] Google (i.d.). *Omgivningen kring Luviä, Finland*. [Google Maps] Hämtad 2019-7-17 från <https://mapstyle.withgoogle.com/>
- [16] Graneli, B. (1999). *Engelsk-Svensk ordlista för högskolematematiken* version 1.4. Luleå tekniska universitet, Institutionen för matematik. Hämtad 2019-7-25 från <https://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1307/E/200506/Mat.OL98.PDF>
- [17] Hurewicz, W. & Wallman, H. (1941). *Dimension Theory (PMS-4)*. Princeton: Princeton University Press.
- [18] Hutchinson, J. E. (1981). Fractals and Self Similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30 (5), 713-747.
- [19] Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons.
- [20] Lindström, S. B. (2004) *Matematisk ordbok för högskolan*. Hämtad 2019-7-25 från <https://www.acc.umu.se/~olletg/donner/dox/matordbok.pdf>
- [21] Mandelbrot, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature* (3rd Edition). New York: W.H. Freeman.
- [22] Mattila, P. (2015). *Fourier Analysis and Hausdorff Dimension (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [23] McClure, M. (1998). Inverse Iteration algorithms for Julia sets. *Mathematica in Education and Research*, 7, 22-28.
- [24] Nillsen, R. (2000). Normal numbers without measure theory. *Am. Math. Monthly*, 107, 639–644.
- [25] Sagan, H. (1994). *Space-Filling Curves*. New York: Springer-Verlag
- [26] Shenker, O. (1994). Fractal geometry is not the geometry of nature. *Studies In History and Philosophy of Science Part A*. 25. 967-981.
- [27] The OEIS Foundation. (i.d.). *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Hämtad 2019-7-23 från <https://oeis.org/>
- [28] Trochet, H. (2009). *A History of Fractal Geometry*. Hämtad 2019-7-25 från <https://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/fractals.html>